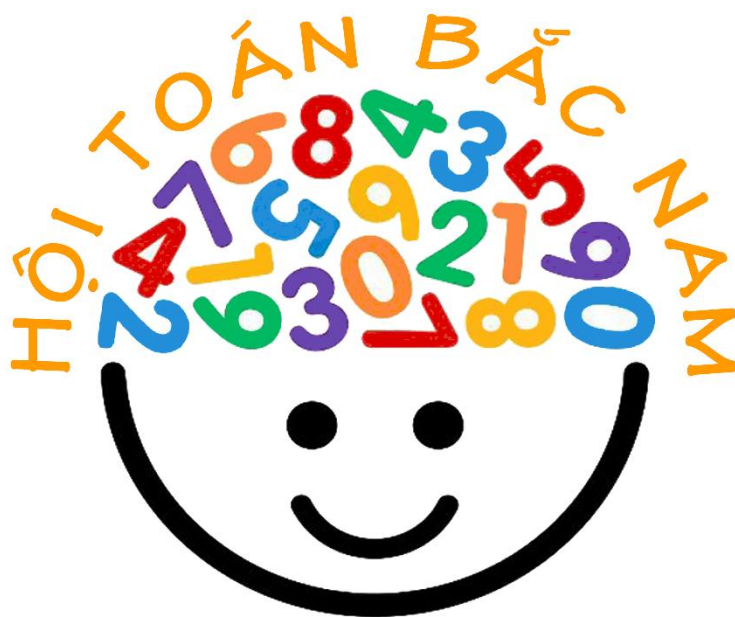




MATH

MỖI THÁNG MỘT CHỦ ĐỀ

Bài toán thực tế về hàm đặc trưng

Thanh Hóa, tháng 05, năm 2017

Các bài toán thực tế về hàm đặc trưng

A. Nội dung kiến thức.

Thông thường các bài toán thực tế liên quan đến hàm đặc trưng quy về bài toán yêu cầu bạn đọc đi tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số này trên một miền, hay cũng có thể đơn giản chỉ là tính giá trị của hàm số tại một điểm.

Về cách tìm giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số trên một miền bằng cách khảo sát sự biến thiên của hàm số tác giả xin được không nhắc lại! Tác giả cung cấp thêm cho bạn đọc một số công thức sau :

- Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$, nếu $a > 0$ thì hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Chứng minh

Xét hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$.

Ta có : $f'(x) = 2ax + b$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{-b^2 + 4ac}{4a}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ sẽ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

- Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$, nếu $a < 0$ thì hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$.

Chứng minh : Xin để lại cho bạn đọc !

- Với a, b là các số thực dương thì ta có : $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Chứng minh

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Bình phương hai vế ta có : $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b$.

- Với a, b, c là các số thực dương thì ta có: $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Chứng minh

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có : $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$.

Lập phương hai vế ta có : $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \Leftrightarrow abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27}$.

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b = c$.

B. Ví dụ minh họa.

Ví dụ 1. Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay phải của một bệnh nhân. Sau thời gian t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = \frac{0,28t}{t^2 + 4}$ với $0 < t < 24$. Hỏi sau bao lâu kể từ khi tiêm thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất?

- A. 12 giờ. B. 8 giờ. C. 6 giờ. D. 2 giờ.

Lời giải

$$\text{Ta có : } C'(t) = \frac{0,28(4-t^2)}{(t^2+4)^2}.$$

$$\text{Suy ra : } C'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{0,28(4-t^2)}{(t^2+4)^2} = 0 \Leftrightarrow 0,28(4-t^2 = 0) \Leftrightarrow t = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nhận xét : Ta đang cần tìm giá trị lớn nhất của $C(t)$ trên khoảng $(0;24)$, mà $C'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 2$ nên ta suy ra $C(t)$ lớn nhất trên $(0;24)$ khi $t = 2$. Tức là sau 2 giờ kể từ khi tiêm nồng độ thuốc ở mạch máu là lớn nhất.

Đáp án D.

Ví dụ 2. Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$ (nghìn người). Đạo hàm của hàm số $f(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Hỏi vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,048 nghìn người/năm?

- A. Năm 2014. B. Năm 2016. C. Năm 2015. D. Năm 2017.

Lời giải

$$\text{Ta có : } f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}.$$

Để tốc độ tăng trưởng dân số là 0,048 nghìn người/năm thì : $f'(t) = 0,048$.

$$\text{Suy ra : } \frac{120}{(t+5)^2} = 0,048 \Leftrightarrow (t+5)^2 = 2500 \Leftrightarrow t+5 = 50 \Leftrightarrow t = 45.$$

Như vậy sau 45 năm kể từ năm 1970 tức là năm 2015 thì tốc độ tăng trưởng dân số là 0,048 nghìn người/năm.

Đáp án C.

Ví dụ 3. Một công ty chuyên sản xuất đĩa CD với chi phí mỗi đĩa là 40 (nghìn đồng). Theo nghiên cứu nếu mỗi đĩa bán với giá x (nghìn đồng) thì số lượng đĩa bán được sẽ là $q(x) = 120 - x$, ($x \in \mathbb{N}^*$). Hãy xác định giá bán của mỗi đĩa sao cho lợi nhuận mà công ty thu được là cao nhất?

- A. 60 nghìn đồng. B. 70 nghìn đồng. C. 80 nghìn đồng. D. 90 nghìn đồng.

Lời giải

Chi phí mà công ty này bỏ ra để sản xuất đĩa là :

$$q(x).40 = (120 - x).40 = 4800 - 40x \text{ (nghìn đồng).}$$

Số tiền mà công ty này thu về từ việc bán đĩa là :

$$x.q(x) = x.(120 - x) = 120x - x^2 \text{ (nghìn đồng).}$$

Lợi nhuận của công ty này thu được từ việc bán đĩa là :

$$f(x) = (120x - x^2) - (4800 - 40x) = -x^2 + 160x - 4800 \text{ (nghìn đồng).}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $(0;120)$.

Nhận thấy rằng đây là hàm số dạng $ax^2 + bx + c$ với $a < 0$ nên nó đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$ khi $x = -\frac{b}{2a}$. Suy ra khi $x = -\frac{160}{2.(-1)} = 80$ thì hàm số $f(x) = -x^2 + 160x - 4800$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$, mà $0 < 80 < 120$ nên $x = 80$ thì hàm số $f(x) = -x^2 + 160x - 4800$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;120)$.

Đáp án C.

Ví dụ 4. Công ty A chuyên sản xuất một loại sản phẩm và ước tính rằng với q sản phẩm được sản xuất trong một tháng thì tổng chi phí sẽ là $C(q) = 3q^2 + 72q - 9789$ (đơn vị tiền tệ). Giá của mỗi sản phẩm được công ty bán với giá $R(q) = 180 - 3q$. Hãy xác định số sản phẩm công ty A cần sản xuất trong một tháng (giả sử công ty này sẽ bán hết được số sản phẩm mà mình làm ra) để thu về lợi nhuận cao nhất ?

- A. 8 sản phẩm. B. 9 sản phẩm. C. 10 sản phẩm. D. 11 sản phẩm.

Lời giải

Ta có : $R(q) > 0 \Leftrightarrow 180 - 3q > 0 \Leftrightarrow q < 60$. Suy ra : $0 < q < 60$.

Số tiền mà công ty A thu được từ việc bán sản phẩm là :

$$q.R(q) = q.(180 - 3q) = 180q - 3q^2$$

Lợi nhuận mà công ty này thu được là :

$$f(q) = (180q - 3q^2) - (3q^2 + 72q - 9789) = -6q^2 + 108q + 9789$$

Ta cần tìm q để $f(q)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;60)$.

Ta thấy $f(q) = -6q^2 + 108q + 9789$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 nhỏ hơn 0 nên khi $x = -\frac{108}{2.(-6)} = 9$ thì hàm số $f(q)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$, mà $0 < 9 < 60$ nên $x = 9$ thì hàm số $f(x)$ cũng đạt giá trị lớn nhất trên $(0;60)$.

Đáp án B.

Ví dụ 5. Một khách sạn có 50 phòng, người ta tính rằng nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì tất cả các phòng đều hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 nghìn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Hỏi người quản lý phải quyết định giá phòng là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất ?

- A. 440 nghìn đồng. B. 450 nghìn đồng. C. 430 nghìn đồng. D. 460 nghìn đồng.

Lời giải

Gọi x (nghìn đồng) là giá phòng khách sạn ($x > 400$).

Giá chênh lệch sau khi tăng là : $x - 400$ (nghìn đồng).

Số phòng trống lúc này là : $2 \cdot \frac{x-400}{20} = \frac{x-400}{10}$ (phòng).

Số phòng cho thuê là : $50 - \frac{x-400}{10} = \frac{900-x}{10}$ (phòng).

Số tiền phòng thu được là : $f(x) = x \cdot \left(\frac{900-x}{10} \right) = \frac{-x^2 + 900x}{10}$ (nghìn đồng).

Ta cần tìm $x > 400$ sao cho $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất. Dễ thấy $x = -\frac{900}{2 \cdot (-1)} = 450$ thì $f(x)$ lớn nhất.

Đáp án B.

Ví dụ 6. Nhiệt độ của một người bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$ với $0 \leq t \leq 11$. Trong đó T là nhiệt độ ($^{\circ}F$) theo thời gian t (giờ) kể từ lúc bắt đầu bị bệnh. Hỏi độ chênh lệch nhiệt độ giữa nhiệt độ lớn nhất và nhỏ nhất trong vòng 11 giờ kể từ lúc mắc bệnh là bao nhiêu (tính theo $^{\circ}C$), biết rằng $^{\circ}C = \frac{^{\circ}F - 32}{1,8}$.

A. $3,6^{\circ}C$.

B. $2^{\circ}C$.

C. $2,6^{\circ}C$.

D. $2,5^{\circ}C$.

Lời giải

Ta có : $T'(t) = 0,2t + 1,2$. Suy ra : $T'(t) = 0 \Leftrightarrow -0,2t + 1,2 = 0 \Leftrightarrow t = 6$.

Ta thấy : $\begin{cases} T(0) = 98,6^{\circ}F \\ T(6) = 102,2^{\circ}F \\ T(11) = 99,7^{\circ}F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min_{t \in [0;11]} T(t) = T(0) = 98,6^{\circ}F = 39^{\circ}C \\ \max_{t \in [0;11]} T(t) = T(6) = 102,2^{\circ}F = 37^{\circ}C \end{cases}$

Độ chênh lệch nhiệt độ giữa nhiệt độ lớn nhất và nhỏ nhất trong vòng 11 giờ kể từ lúc mắc bệnh là : $39 - 37 = 2 (^{\circ}C)$.

Đáp án B.

Ví dụ 7. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $2^{\circ}C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ trái đất tăng thêm $5^{\circ}C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng nhiệt độ trái đất tăng thêm $t^{\circ}C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$, trong đó k và a là các hằng số dương. Hỏi khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu $^{\circ}C$ (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20% ?

A. $8,4^{\circ}C$.

B. $9,3^{\circ}C$.

C. $7,6^{\circ}C$.

D. $6,7^{\circ}C$.

Lời giải

Ta có : $\begin{cases} f(2)=3 \\ f(5)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k.a^2=3 \\ k.a^5=10 \end{cases} \Rightarrow a^3=\frac{10}{3} \Leftrightarrow a=\sqrt[3]{\frac{10}{3}}.$

Ta cũng suy ra được : $k=\frac{3}{a^2}.$

Do đó : $f(t)=k.a^t=\frac{3}{a^2}.a^t$ với $a=\sqrt[3]{\frac{10}{3}}.$

Ta cần tìm t để $f(t)=20$, hay : $k.a^t=20.$

Suy ra : $t=\log_a \frac{20}{k}=\log_a \frac{20a^2}{3} \approx 6,7 (^{\circ}C).$

Đáp án D.

Ví dụ 8. Một công ty chuyên sản xuất kim cương, theo nghiên cứu nếu mỗi viên kim cương giá x (nghìn USD) thì lợi nhuận thu được từ việc bán viên kim cương đó là $q(x)=\frac{1}{16}x^2(6-x)$ (nghìn USD).

Hỏi khi bán một viên kim cương công ty này có thể thu được nhiều nhất bao nhiêu tiền lãi, biết rằng giá bán của mỗi viên kim cương do công ty này sản xuất không vượt quá 6000 USD.

- A. 500 USD. B. 1000 USD. C. 1500 USD. D. 2000 USD.

Lời giải

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $q(x)=\frac{1}{16}x^2(6-x)$ trên $(0;6]$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$q(x)=\frac{1}{16}x^2(6-x)=\frac{1}{4}\left[\frac{x}{2}.\frac{x}{2}.(6-x)\right]\leq\frac{1}{4}.\frac{\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+(6-x)\right]^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow q(x)\leq\frac{1}{4}.\frac{6^3}{27}\Leftrightarrow q(x)\leq 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\frac{x}{2}=6-x\Leftrightarrow x=4.$

Như vậy khi bán một viên kim cương công ty này có thể thu được nhiều nhất 2000 USD tiền lãi.

Đáp án D.

Ví dụ 9. Khi nuôi cá trong hồ, một nhà sinh vật học thấy nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình sau mỗi vụ một con cá nặng $P(n)=480-20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất, biết rằng mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ không được thả nhiều hơn 23 con cá ?

- A. Thả 8 con. B. Thả 12 con. C. Thả 20 con. D. Thả 23 con.

Lời giải

Khối lượng cá thu được sau một vụ là : $f(x)=n.P(n)=n.(480-20n)$ (gam).

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=n(480-20n)$ trên $(0;23]$.

Cách 1 :

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$f(n) = n(480 - 20n) = \frac{1}{20} \cdot [20n \cdot (480 - 20n)] \leq \frac{1}{20} \cdot \frac{[20n + (480 - 20n)]^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(n) \leq \frac{1}{20} \cdot \frac{480^2}{4} \Leftrightarrow f(n) \leq 2880 \text{ (gam).}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $20n = 480 - 20n \Leftrightarrow n = 12$.

Như vậy phải thả 12 con cá trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Đáp án B.

Cách 2 :

Ta có : $f(n) = n(480 - 20n) = -20n^2 + 480n$.

Hàm số $f(n)$ là hàm số bậc hai có hệ số của n^2 bé hơn 0 nên khi $x = -\frac{480}{2 \cdot (-20)}$ hay $x = 12$

thì hàm số $f(n)$ đạt giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$, mà $0 < 12 \leq 23$ nên khi $x = 12$ thì $f(n)$ cũng đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 23]$.

Đáp án B.

Ví dụ 10. Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là hằng số. Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được là 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản ?

A. 1000 lần.

B. 10 lần.

C. 2 lần.

D. 100 lần.

Lời giải

Gọi A là biên độ trận động đất ở San Francisco và B là biên độ trận động đất ở Nhật Bản.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \log A - \log A_0 = 8 \Leftrightarrow \log \frac{A}{A_0} = 8 \\ \log B - \log A_0 = 6 \Leftrightarrow \log \frac{B}{A_0} = 6 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } \log \frac{A}{A_0} - \log \frac{B}{A_0} = 8 - 6 \Leftrightarrow \log \left(\frac{A}{A_0} : \frac{B}{A_0} \right) = 2 \Leftrightarrow \log \frac{A}{B} = 2 \Leftrightarrow \frac{A}{B} = 10^2 = 100.$$

Đáp án D.

Ví dụ 11. Người ta quy ước $\log x$ là giá trị của $\log_{10} x$. Trong lĩnh vực kỹ thuật, $\log x$ được sử dụng khá nhiều, đối với toán học, người ta sử dụng $\log x$ để tìm xem một số nguyên dương nào đó có bao nhiêu chữ số. Ví dụ số A có n chữ số thì $n = [\log A] + 1$ với $[\log A]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá A . Hỏi 2017^{2017} có bao nhiêu chữ số ?

A. 9999 chữ số.

B. 6666 chữ số.

C. 6665 chữ số.

D. 6699 chữ số.

Lời giải

Giả sử số 2017^{2017} có n chữ số, khi đó ta có :

$$n = \left[\log 2017^{2017} \right] + 1 = 2017 \left[\log 2017 \right] + 1 = 6666 \text{ (chữ số).}$$

C. Bài tập đề nghị

- Bài 1.** Một cửa hàng bán sản phẩm với giá 10 USD. Với giá bán này, cửa hàng bán được khoảng 25 sản phẩm. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính cứ giảm 2 USD thì số sản phẩm tăng lên 25 sản phẩm. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận nhiều nhất, biết rằng giá mua về của một sản phẩm là 5 USD.
- A. $\frac{65}{8}$ USD. B. $\frac{63}{8}$ USD. C. $\frac{67}{8}$ USD. D. $\frac{61}{8}$ USD.
- Bài 2.** Một công ty du lịch dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất ?
- A. 1875000 đồng. B. 1375000 đồng.
C. 1675000 đồng. D. 1475000 đồng.
- Bài 3.** Chi phí về nhiên liệu của một con tàu được chia làm hai phần. Trong đó phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng/giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với vận tốc, khi $v = 10$ km/h thì phần thứ hai bằng 30 nghìn đồng/giờ. Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường là nhỏ nhất ?
- A. 25 km/h. B. 15 km/h. C. 20 km/h. D. 30 km/h.
- Bài 4.** Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right)$ với $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $f(t) = V'(t)$. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :
- A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút 90.
B. Tốc độ bơm tăng từ lúc bắt đầu bơm đến phút 75.
C. Tốc độ bơm luôn giảm.
D. Tốc độ bơm luôn tăng.
- Bài 5.** Biết rằng mối quan hệ giữa nhu cầu thị trường và sản lượng gạo của một doanh nghiệp được cho theo hàm $Q = 656 - \frac{1}{2}P$, trong đó Q là lượng gạo mà thị trường cần và P là giá bán của

một tấn gạo. Lại biết chi phí cho việc sản xuất được cho theo hàm $C(Q) = Q^3 - 77Q^2 + 1000Q + 100$, trong đó C là chi phí doanh nghiệp bỏ ra, Q (tấn) là lượng gạo sản xuất trong cùng một đơn vị thời gian. Để có lợi nhuận cao nhất thì doanh nghiệp này cần sản xuất lượng gạo gần với giá trị nào nhất sau đây ?

- A. 51 tấn. B. 52 tấn. C. 2 tấn. D. 3 tấn.

Bài 6. Một doanh nghiệp sản xuất và bán một loại sản phẩm với giá 45 nghìn đồng cho mỗi sản phẩm, với giá bán này khách hàng sẽ mua 60 sản phẩm mỗi tháng. Doanh nghiệp dự định tăng giá bán và họ ước tính rằng nếu tăng giá bán lên 2 nghìn đồng thì mỗi tháng sẽ bán được ít hơn 6 sản phẩm. Biết rằng chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 27 nghìn đồng. Hỏi doanh nghiệp phải bán với giá bao nhiêu để lợi nhuận thu được là lớn nhất

- A. 46 nghìn đồng. B. 47 nghìn đồng.
C. 48 nghìn đồng. D. 49 nghìn đồng.

Bài 7. Trong giai đoạn từ năm 1980 đến năm 1984, tỉ lệ phần trăm những hộ gia đình ở Mỹ có ít nhất một đầu máy video (VCR) đã được mô hình hóa bởi hàm số sau : $V(t) = \frac{75}{1 + 74e^{0,6t}}$,

trong đó t là thời gian được tính bằng năm ($0 \leq t \leq 14$). Hỏi thời điểm mà số VCR tăng nhanh nhất gần với năm nào nhất trong các năm sau :

- A. Năm 1994. B. Năm 1990. C. Năm 1989. D. Năm 1987.

Bài 8. Người ta tiêm một loại thuốc vào mạch máu ở cánh tay của một bệnh nhân. Sau t giờ, nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân đó được cho bởi công thức $C(t) = 100(e^{-0,4t} - e^{-0,6t})$ với $0 < t \leq 24$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất (làm tròn đến 1 giờ).

- A. 12 giờ. B. 8 giờ. C. 6 giờ. D. 2 giờ.

Bài 9. Sự sản sinh virus Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$, biết $N'(t) = \frac{1000}{1 + 0,5t}$ và lúc đầu đám virus có số lượng 250000 con. Tính số lượng virus sau 10 ngày (làm tròn đến hàng đơn vị).

- A. 264334 con. B. 257167 con.
C. 258959 con. D. 253584 con.

Bài 10. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây đó bị chết thì hiện tượng quang hợp sẽ ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được cho bởi công thức :

$P(t) = 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}}$ (%). Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ này là 65,21%. Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó (làm tròn đến 1 năm).

- A. 3574 năm. B. 3754 năm. C. 3475 năm. D. 3547 năm.

Bài 11. Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng thì mọi căn hộ đều có người thuê, nhưng cứ tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100000 đồng mỗi tháng thì sẽ có 2 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất thì công ty này phải cho thuê mỗi căn hộ với giá bao nhiêu tiền mỗi tháng.

- A. 2225000 đồng. B. 2100000 đồng.
C. 2200000 đồng. D. 2250000 đồng.

Bài 12. Một giáo viên luyện thi Đại học đang đau đầu về việc thi cử thay đổi liên tục, cộng với việc lương thấp không đảm bảo cuộc sống nên đang phân vân có nên tạm thời gác lại niềm đam mê chuyển hẳn sang kinh doanh trà sữa Trân Châu hay không. Sau khi nhờ người nghiên cứu thị trường thì thu được kết quả như sau: nếu bán với giá 40000 đồng một cốc thì mỗi tháng trung bình bán được 2000 cốc, còn từ mức giá 40000 đồng mà cứ tăng 1000 đồng thì sẽ bán ít đi 100 cốc. Biết chi phí nguyên vật liệu để pha một cốc trà sữa không thay đổi là 28000 đồng. Hỏi phải bán mỗi cốc trà sữa với giá bao nhiêu để thu được lợi nhuận tối đa?

- A. 40000 đồng. B. 42000 đồng.
C. 44000 đồng. D. 49000 đồng.

Bài 13. Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của các chất phóng xạ (tại thời điểm $t = 0$); T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kỳ bán rã của ^{14}C là khoảng 5730 năm. Người ta tìm được trong mẫu đồ cổ một lượng cacbon và xác định nó mất khoảng 25 % lượng ^{14}C ban đầu của nó. Hỏi mẫu đồ cổ đó khoảng bao nhiêu năm tuổi ?

- A. 2378 năm. B. 2300 năm. C. 2387 năm. D. 2400 năm.

Bài 14. Một sóng âm truyền trong không khí với mức cường độ âm được tính theo công thức $L(\text{dB}) = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, trong đó $I_0 = 10^{-12} \cdot \frac{W}{m^2}$ là cường độ âm chuẩn. Mức cường độ âm tại điểm M và tại điểm N lần lượt là 40 dB và 80 dB. Cường độ âm tại N lớn hơn cường độ âm tại M bao nhiêu lần ?

- A. 10000 lần. B. 1000 lần. C. 40 lần. D. 2 lần.

Bài 15. Số lượng một loại vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn là 10 triệu con ?

- A. 48 phút. B. 19 phút. C. 7 phút. D. 12 phút.

Bài 16. Một chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 50 hành khách. Nếu một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $20 \left(3 - \frac{x}{40} \right)^2$ nghìn đồng. Khẳng định đúng là :

- A. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất là 3200000 đồng.
B. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất khi chở 45 hành khách.
C. Một chuyến xe buýt thu được số tiền nhiều nhất là 2700000 đồng.
D. Một chuyến xe buýt thu được nhiều nhất khi chở 50 hành khách.

- Bài 17.** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được xác định bởi công thức $G(x) = 0,024x^2(30 - x)$, trong đó x (mg) là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp. Tìm lượng thuốc để tiêm cho bệnh nhân cao huyết áp để huyết áp giảm nhiều nhất.
A. 20 mg. **B.** 0,5 mg. **C.** 2,8 mg. **D.** 15 mg.
- Bài 18.** Cho biết chu kì bán rã của chất phóng xạ radi Ra^{226} là 1602 năm (tức là một lượng Ra^{226} sau 1602 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r ($r < 0$) là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy. Hỏi 5 gam Ra^{226} sau 4000 năm phân hủy sẽ còn lại bao nhiêu gam (làm tròn đến 3 chữ số thập phân)?
A. 0,923 gam. **B.** 0,886 gam.
C. 1,023 gam. **D.** 0,795 gam.
- Bài 19.** Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để vi khuẩn tăng gấp đôi số ban đầu gần đúng nhất với kết quả nào trong các kết quả sau :
A. 3 giờ 9 phút. **B.** 4 giờ 10 phút. **C.** 3 giờ 40 phút. **D.** 2 giờ 5 phút.
- Bài 20.** Người ta thả một lá bèo vào một hồ nước. Giả sử sau 9 giờ, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần lượng lá bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì số lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ cái hồ?
A. 3. **B.** $\frac{10^9}{3}$. **C.** $9 - \log 3$. **D.** $\frac{9}{\log 3}$.
- Bài 21.** Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t là với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{1000}{2t+1}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?
A. 5433,99 và không cứu được. **B.** 1499,45 và cứu được.
C. 283,01 và cứu được. **D.** 3716,99 và cứu được.
- Bài 22.** Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).
A. 33,2. **B.** 11. **C.** 8,9. **D.** 2,1.
- Bài 23.** Người ta thả một ít lá bèo vào hồ nước. Biết rằng sau 1 ngày, bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ và sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp đôi so với trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ hồ?

- A. $\log_2(2^{24} - 3)$. B. $24 - \log_2 3$. C. $\frac{2^{24}}{3}$. D. $\frac{24}{\log_2 3}$.

Bài 24. Các nhà khoa học thực hiện nghiên cứu trên một nhóm học sinh bằng cách cho họ xem một danh sách các loài động vật và sau đó kiểm tra xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$ %. Hỏi khoảng thời gian ngắn nhất bao lâu thì số học sinh trên nhớ được danh sách đó dưới 10 % ?

- A. Khoảng 23 tháng. B. Khoảng 24 tháng.
C. Khoảng 25 tháng. D. Khoảng 26 tháng.

Bài 25. Theo số liệu từ Facebook, số lượng các tài khoản hoạt động tăng một cách đáng kể tính từ thời điểm tháng 2 năm 2004. Biết số lượt tài khoản hoạt động tăng theo hàm số mũ xấp xỉ như sau : $U(x) = A(1+0,04)^x$ với A là số tài khoản hoạt động đầu tháng 2 năm 2004. Hỏi đến sau bao lâu thì số tài khoản hoạt động xấp xỉ là 194790 người, biết sau hai tháng thì số tài khoản hoạt động là 108160 người.

- A. 1 năm 5 tháng. B. 1 năm 2 tháng.
C. 1 năm. D. 11 tháng.

Bài 26. Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức là P giảm theo công thức $P = P_0 e^{xi}$, với $P_0 = 760$ mmHg là áp suất ở mức nước biển ($x=0$), i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m áp suất của không khí là 672,71 mmHg. Hỏi áp suất không khí là $\frac{672,71^3}{760^2}$ mmHg ở độ cao bao nhiêu ?

- A. 2000 m. B. 3000 m. C. 4000 m. D. 5000 m.

Bài 27. Ký hiệu $h(t)$ (cm) là mức nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước L (cm) ở bồn sau khi bơm nước được 19 giây.

- A. $L=14$. B. $L=15,25$. C. $L=16,25$. D. $L=18,5$.

Bài 28. Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, với A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 8100 con ?

- A. 4 giờ. B. 24 giờ. C. 10 giờ. D. 20 giờ.

Bài 29. Một đám vi khuẩn tại ngày thứ x có số lượng là $N(x)$. Biết rằng $N'(x) = \frac{2000}{1+x}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Vậy ngày thứ 12 số lượng vi khuẩn là bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị) ?

- A. 10130. B. 5130. C. 5154. D. 10129.

Bài 30. Gọi $N(t)$ (ml/phút) là tốc độ rò rỉ dầu từ một đường ống dưới đáy biển. Biết $N'(t) = t(t-1)^2$. Khi đó lượng dầu rò rỉ ra trong một tiếng đầu tiên là :

- A.** 3097800 ml.

B. $\frac{1}{12}$ ml.

C. 30789800 ml.

D. 12ml.

Bài 31. Khoảng 200 năm trước, hai nhà khoa học Pháp là Clô-zi-ut và Cla-pay-rông đã thấy rằng áp suất p của hơi nước (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) gây ra khi nó chiếm khoảng trống phía trên của mặt nước chứa trong một bình kín được tính theo công thức $p = a \cdot 10^{\frac{k}{t+273}}$, với t là nhiệt độ $^{\circ}\text{C}$ của nước, a và k là hằng số. Cho biết $k \approx -2258,624$ và khi nhiệt độ của nước là 100°C thì áp suất của hơi nước là 760 mmHg. Tìm $[a]$, với $[a]$ có giá trị nguyên không vượt quá a .

A. $[a] = 863118842$.

B. $[a] = 863188842$.

C. $[a] = 863118841$.

D. $[a] = 863188841$.

Bài 32. Nồng độ muối trong nước biển C (mol/l) là một hàm phụ thuộc vào độ sâu s (km) có phương trình: $C(s) = \frac{e^{s-s^2}}{\sqrt{s+1}} + 0,1$ (mol/l). Tìm độ sâu s_0 để nồng độ muối nơi đó là lớn nhất.

A. $s_0 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$ (km).

B. $s_0 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$ (km).

C. $s_0 = 1,182$ (km).

D. Không tồn tại s_0 .

D. Hướng dẫn, đáp án.

Hướng dẫn.

Bài 1. Gọi x là giá bán thực tế ($5 \leq x \leq 10$).

Ta có giảm giá 2 USD thì sẽ bán được thêm 40 sản phẩm nên khi giảm $10 - x$ USD thì sẽ tăng thêm $20(10 - x)$ sản phẩm.

Số sản phẩm mà cửa hàng bán được khi giảm giá là : $25 + 20(10 - x) = -20x + 225$.

Lợi nhuận thu được là : $f(x) = (-20x + 225)(x - 5) = -20x^2 + 325x - 1125$ (USD).

Ta cần tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất, mà $f(x)$ là hàm số bậc hai có hệ số của x^2 âm nên $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi : $x = -\frac{325}{2 \cdot (-20)} = \frac{65}{8}$.

Bài 2. Gọi x (triệu đồng) là giá tua ($0 < x < 2$).

Giá đã giảm so với ban đầu $2 - x$ (triệu đồng).

Số người tham gia tăng thêm là : $\frac{(2 - x)}{0,1} \cdot 20 = 400 - 200x$ (người).

Tổng số người tham gia là : $150 + (400 - 200x) = 550 - 200x$ (người).

Tổng doanh thu là : $f(x) = x \cdot (550 - 200x)$ (triệu đồng).

Ta cần tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0; 2)$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$f(x) = \frac{1}{200} \cdot [200x \cdot (550 - 200x)] \leq \frac{1}{200} \cdot \frac{[200x + (550 - 200x)]^2}{4} = \frac{3025}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi : $200x = 550 - 200x \Leftrightarrow x = \frac{11}{8} = 1,375$.

Như vậy để có lợi nhuận cao nhất công ty này phải bán tua với giá 1375000 đồng.

Bài 3. Gọi x (km/h) là vận tốc của tàu

Thời gian tàu chạy quãng đường 1 km là : $\frac{1}{x}$ (giờ).

Chi phí nhiên liệu cho phần thứ nhất là : $\frac{1}{x} \cdot 480 = \frac{480}{x}$ (nghìn đồng).

Tại $v = 10$ (km/h) chi phí cho quãng đường 1 km ở phần thứ hai là : $\frac{1}{10} \cdot 30 = 3$ (nghìn đồng).

Xét tại vận tốc x (km/h) : gọi y (nghìn đồng) là chi phí cho quãng đường 1 km tại vận tốc x

$$\text{ta có : } \begin{cases} y = kx^3 \\ 3 = k10^3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0,003x^3.$$

Tổng chi phí nhiên liệu cho 1 km đường là : $f(x) = \frac{480}{x} + 0,003x^3$ (nghìn đồng).

Ta cần tìm x để hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất với $x > 0$.

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$f(x) = \frac{160}{x} + \frac{160}{x} + \frac{160}{x} + 0,003x^3 \geq 4\sqrt[4]{\frac{160}{x} \cdot \frac{160}{x} \cdot \frac{160}{x} \cdot 0,003x^3} = 48$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\frac{160}{x} = 0,003x^3 \Rightarrow x = 20$ (km/h).

Bài 4. Ta có : $f(t) = V'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3) \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2).$

$$\text{Suy ra : } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{100}(180t - 3t^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 60 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra tốc độ bơm giảm từ phút thứ 60, nên khẳng định tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút 90 là khẳng định đúng.

Bài 5. Ta có : $Q = 656 - \frac{1}{2}P \Rightarrow P = 1312 - 2Q.$

Doanh thu của doanh nghiệp là : $R = P \cdot Q = (1312 - 2Q) \cdot 2Q.$

Lợi nhuận của doanh nghiệp là : $L = R - C = -Q^3 + 75Q^2 + 312Q - 100.$

Khảo sát hàm số trên ta thấy lợi nhuận lớn nhất khi $Q = 52.$

Bài 6. Gọi x ($x > 45$) là giá bán mới của một sản phẩm, suy ra số tiền đã tăng là : $x - 45.$

Ta có tăng 2 nghìn đồng thì sẽ bán ít đi 6 sản phẩm nên nếu tăng $x - 45$ nghìn đồng thì số

$$\text{lượng sản phẩm bán được sẽ giảm đi : } \frac{6(x - 45)}{2} = 3x - 135.$$

Tổng số sản phẩm bán được là : $60 - (3x - 135) = 195 - 3x.$

Lợi nhuận mà công ty thu được sau khi tăng giá là :

$$f(x) = (x - 27)(195 - 3x) \Leftrightarrow f(x) = -3x^2 + 276x - 5265$$

Bài toán trở thành tìm x để $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất với $x > 45$, ta nhận thấy $f(x)$ là hàm

số bậc hai có hệ số của x^2 âm nên tìm ran gay khi $x = -\frac{276}{2 \cdot (-3)} = 46$ thì $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7. Ta có : $V'(t) = \frac{330e^{-0,6t}}{(1 + 74e^{-0,6t})^2} \Rightarrow V''(t) = \frac{1998e^{-0,6t} \cdot (74e^{-0,6t} - 1)}{(1 + 74e^{-0,6t})^3}.$

$$\text{Suy ra : } V''(t) = 0 \Leftrightarrow 74e^{-0,6t} - 1 = 0 \Rightarrow t \approx 7,17.$$

Như vậy vào khoảng năm 1987 thì số VCR tăng nhanh nhất.

Bài 8. Ta có : $C'(t) = 100(-0,4e^{-0,4t} + 0,6e^{-0,6t})$.

$$\text{Xét } C'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{0,2t} = \frac{3}{2} \Rightarrow t = 5 \ln \frac{3}{2} \approx 2,027.$$

Suy ra sau khoảng 2 giờ thì nồng độ thuốc ở mạch máu của bệnh nhân là lớn nhất.

Bài 9. Ta có : $N(t) = \int \frac{1000}{1+0,5t} dt = \int \frac{2000}{2+t} dt = 2000 \ln(2+t) + C$.

Vì thời điểm ban đầu số lượng virus là 250000 con nên ta có : $N(0) = 250000$.

$$2000 \ln 2 + C = 250000 \Leftrightarrow C = 250000 - 2000 \ln 2.$$

Số lượng virus sau 10 ngày là : $N(10) = 2000 \ln(2+10) + C \approx 253584$ (con).

Bài 10. Ta có : $P(t) = 65,21 \Leftrightarrow 100.(0,5)^{\frac{t}{5750}} = 65,21 \Leftrightarrow (0,5)^{\frac{t}{5750}} = 0,6521$

$$\frac{t}{5750} = \log_{0,5} 0,6521 \Leftrightarrow t = 5750 \cdot \log_{0,5} 0,6521 \approx 3547 \text{ (năm)}.$$

Bài 11. Gọi x là số tiền cho thuê mỗi căn hộ sau khi tăng giá.

$$\text{Số căn hộ bị bỏ trống là : } \frac{x-2000000}{100000} \cdot 2 = \frac{x-2000000}{50000}.$$

$$\text{Số căn hộ cho thuê là : } 50 - \frac{x-2000000}{50000} = \frac{4500000-x}{50000}.$$

$$\text{Tổng số tiền thu về hàng tháng là : } f(x) = x \cdot \left(\frac{4500000-x}{50000} \right) = \frac{-x^2 + 4500000x}{50000}.$$

$$\text{Ta có : } f(x) \text{ lớn nhất khi : } x = -\frac{4500000}{2 \cdot (-1)} = 2250000 \text{ (đồng)}.$$

Bài 12. Gọi x là số lần tăng lên 1000 đồng ở 1 cốc kể từ mức giá 40000 (đồng).

Số cốc trà sữa bán ra trong 1 tháng là $2-0,1x$ (nghìn).

Để giáo viên luôn bán được trà sữa, ta xét điều kiện $0 \leq x < 20$. Khi đó, số tiền lãi được tính bằng công thức

$$f(x) = (40 + x \cdot 1)(2 - 0,1x) - 28(2 - 0,1x) = -0,1x^2 + 0,8x + 24 \quad (0 \leq x < 20)$$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ với $0 \leq x < 20$ ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 4$.

Như vậy, mỗi cốc trà sữa bán với giá $40000 + 4 \cdot 1000 = 44000$ (đồng).

Bài 13. Ta có : $m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{5730}} = \frac{3}{4} m_0 \Leftrightarrow t = 5730 \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} \approx 2378$ (năm).

Bài 14. Gọi I_M, I_N lần lượt là cường độ âm tại M và N .

$$\text{Theo bài ra ta có : } \begin{cases} 40 = 10 \log \frac{I_M}{I_0} \\ 80 = 100 \log \frac{I_N}{I_0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{I_{M_0}}{I_0} = 10^{-4} \\ \frac{I_N}{I_0} = 10^{-8} \end{cases} \Rightarrow I_N = 10000 I_M.$$

Bài 15. Sau 3 phút số lượng vi khuẩn là 625000 con nên ta có :

$$625000 = s(0).2^3 \Leftrightarrow s(0) = \frac{625000}{8} = 78125 \text{ (con)}.$$

Khi số lượng vi khuẩn đạt 10 triệu con thì ta có :

$$78125.2^t = 10^7 \Leftrightarrow 2^t = 128 \Leftrightarrow t = 7 \text{ (phút)}.$$

Bài 16. Số tiền thu được khi chở x hành khách là : $f(x) = x.20\left(3 - \frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng).

Theo bất đẳng thức AM-GM ta có :

$$f(x) = 400 \cdot \left[\frac{x}{20} \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right) \cdot \left(3 - \frac{x}{40}\right) \right] \leq 400 \cdot \frac{\left[\frac{x}{20} + \left(3 - \frac{x}{40}\right) + \left(3 - \frac{x}{40}\right) \right]^3}{27} = 3200$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \frac{x}{20} = 3 - \frac{x}{40} \Leftrightarrow x = 40.$$

Như vậy khi chở 40 hành khách thì sẽ thu được nhiều tiền nhất và thu được 3200000 đồng.

Bài 17. Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $G(x)$ trên $[0;30]$.

$$\text{Ta có : } G(x) = 0,024x^2(30-x) = -\frac{3}{125}x^3 + \frac{18}{25}x^2.$$

$$\text{Suy ra : } G'(x) = -\frac{9}{125}x^2 + \frac{36}{25}x, \quad G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 20 \in [0;30] \end{cases}$$

Ta có : $G(20) = 96, G(30) = 0, G(0) = 0$ nên $G(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 20$ (mg).

Bài 18. Gọi T là chu kì bán rã, suy ra $\frac{1}{2}A = Ae^{r.T} \Rightarrow r = \frac{-\ln 2}{T}$.

$$\text{Do đó: } S = 5.e^{\frac{-\ln 2}{T}.4000} = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4000}{1602}} \approx 0,886.$$

Bài 19. Vì số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con nên sự tăng trưởng của loại vi khuẩn này được tính theo công thức : $S = 100e^{rt}$.

$$\text{Sau 5 giờ có 300 con, suy ra } 300 = 100.e^{5r} \Rightarrow r = \frac{\ln 3}{5}.$$

Khi số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi ta có :

$$100e^{rt} = 200 \Leftrightarrow e^{rt} = 2 \Leftrightarrow rt = \ln 2 \Leftrightarrow \frac{\ln 3}{5}.t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \frac{5\ln 2}{\ln 3} \approx 3,15 \text{ (giờ)}.$$

Vi khuẩn tăng số lượng gấp đôi sau thời gian 3 giờ 9 phút.

Bài 20. Sau 9 giờ có 10^9 lá bèo (đầy hồ).

$$\text{Sau } n \text{ giờ có } 10^n \text{ lá bèo } \left(\frac{1}{3} \text{ hồ}\right).$$

$$\text{Suy ra: } 10^n = \frac{1}{3}10^9 \Rightarrow n = 9 - \log 3.$$

Bài 21. Số con HP tại ngày thứ t là $F(t) = 500\ln(2t+1) + 2000$. Khi đó $F(15) \approx 3716,99 < 4000$.
Như vậy bệnh nhân này vẫn có thể cứu chữa được.

Bài 22. Ta có $M' = \log 4A - \log A_0 = \log 4 + \log A - \log A_0 = \log 4 + 8,3 \approx 8,9$.

Bài 23. Gọi số lượng lá bèo ban đầu là M_0 thì số lượng lá bèo sau t giờ là : $M(t) = M_0 \cdot 2^t$.
Số lượng lá bèo sau 1 ngày là : $M(24) = M_0 \cdot 2^{24}$.

Khi số lượng lá bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ hồ ta có :

$$M(t) = \frac{1}{3} M(24) \Leftrightarrow M_0 \cdot 2^t = \frac{1}{3} M_0 \cdot 2^{24} \Leftrightarrow t = \log_2 \frac{2^{24}}{3} = 24 - \log_2 3.$$

Bài 24. Ta có : $M(t) \leq 10 \Leftrightarrow 75 - 20 \ln(t+1) \leq 10$

$$\Leftrightarrow 20 \ln(t+1) \geq 65 \Leftrightarrow t+1 \geq e^{\frac{65}{20}} \Leftrightarrow t \geq e^{\frac{65}{20}} - 1 \approx 24,79$$

Như vậy sau 25 tháng học sinh sẽ nhớ danh sách được dưới 10 %.

Bài 25. Vì sau 2 tháng số tài khoản hoạt động là 108160 người nên :

$$A(1+0,04)^2 = 108160 \Leftrightarrow A = 100000 \text{ (tài khoản)}.$$

Khi đó : $U(x) = 100000 \cdot 1,04^x$.

Khi số tài khoản hoạt động là 194790 ta có :

$$U(x) = 194790 \Leftrightarrow 100000 \cdot 1,04^x = 194790 \Leftrightarrow 1,04^x = 1,94790$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,04} 1,94790 \approx 17$$

Như vậy sau 1 năm 5 tháng thì số tài khoản hoạt động xấp xỉ 194790 người.

Bài 26. Ta có : $672,71 = 760 \cdot e^{1000i} \Leftrightarrow e^{1000i} = \frac{672,71}{760}$

$$\Leftrightarrow 1000i = \ln \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i = \frac{\ln \frac{672,71}{760}}{1000}$$

Bài ra ta có ngay $\frac{672,71^3}{760^2} = 760 \cdot e^{x \cdot i} \Leftrightarrow e^{xi} = \left(\frac{672,71}{760} \right)^3$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{1000} \cdot \ln \frac{672,71}{760} = \ln \left(\frac{672,71}{760} \right)^3 = 3 \ln \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow \frac{x}{1000} = 3 \Leftrightarrow x = 3000 \text{ (m)}.$$

Bài 27. Ta có $h'(t) = \frac{1}{3} \sqrt[3]{t+8} \Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{3} \sqrt[3]{t+8} dt = \frac{1}{3} \int (t+8)^{\frac{1}{3}} d(t+8)$

$$h(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(t+8)^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{(t+8)^{\frac{4}{3}}}{4} + C.$$

Lúc đầu bồn không có nước nên ta có : $h(0) = 0$

$$\text{Suy ra : } \frac{8^{\frac{4}{3}}}{4} + C = 0 \Leftrightarrow C = -4 \Rightarrow h(t) = \frac{(t+8)^{\frac{4}{3}}}{4} - 4.$$

Khi đó $L = h(19) = \frac{65}{4} = 16,25 \text{ (cm)}.$

Bài 28. Ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này :

$$300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow e^{5r} = 3 \Leftrightarrow 5r = \ln 3 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}.$$

Ta có : $8100 = 100.e^{\frac{t \cdot \ln 3}{5}} \Leftrightarrow e^{\frac{t \cdot \ln 3}{5}} = 81 \Leftrightarrow t \cdot \frac{\ln 3}{5} = \ln 81 \Leftrightarrow t = 20$ (giờ).

Bài 29. Ta có: $N(x) = \int \frac{2000}{1+x} dx = 2000 \cdot \ln|1+x| + C.$

Do ban đầu khối lượng vi khuẩn là 5000 nên : $N(x) = 2000 \cdot \ln|1+x| + 5000.$

Với $x = 12$ thì số lượng vi khuẩn là $N(12) = 2000 \cdot \ln|1+2000| + 5000 \approx 10130$ (con).

Bài 30. Ta có : $N'(t) = t(t^2 - 2t + 1) = t^3 - 2t^2 + t$

Suy ra : $N(t) = \int N'(t) dt = \int (t^3 - 2t^2 + t) dt = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C.$

Do tại thời điểm ban đầu lượng dầu rò rỉ bằng 0 nên : $N(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$ (ml).

Lượng dầu rò rỉ ra trong 1 tiếng đầu tiên là :

$$N(60) = \frac{1}{4} \cdot 60^4 - \frac{2}{3} \cdot 60^3 + \frac{1}{2} \cdot 60^2 = 3097800 \text{ (ml)}.$$

Bài 31. Ta có : $760 = a \cdot 10^{\frac{-2258,624}{100+273}} \Rightarrow [a] = 863188841.$

Bài 32. Ta có : $C(s) = \frac{e^{s-s^2}}{\sqrt{s+1}} + 0,1 \Rightarrow C'(s) = -\frac{e^{s-s^2}(4s^2 + 2s - 1)}{2(s+1)^{3/2}}$

Suy ra : $C(s) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ s = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \end{cases}.$

Vì s là độ sâu nên ta chỉ cần xét trong trường hợp $s \geq 0$. Do đó, dễ dàng nhận thấy giá trị lớn nhất khi $s = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$

Đáp án.

Câu	Đáp án
1	A
2	B
3	C
4	A
5	B
6	A
7	D
8	D
9	D
10	D
11	D
12	C
13	A
14	A
15	C
16	A

17	A
18	B
19	A
20	A
21	D
22	C
23	B
24	C
25	A
26	B
27	C
28	D
29	A
30	A
31	D
32	A