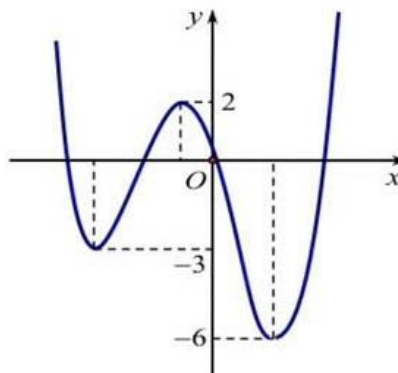


Họ, tên thí sinh:

Số báo danh:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**Câu 1.** Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1
C. 2
- B. 4
D. 3

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Khi đó $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ bằng

- A. $\overrightarrow{BD}$.
C. $4\overrightarrow{AO}$.
- B. $2\overrightarrow{OC'}$.
D. $2\overrightarrow{AC}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -3)$, $\vec{c} = (0; 3; -2)$.Điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM} + \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$, tổng $x + y + z$ bằng

- A. 3.
C. 4.
- B. -3.
D. -2.

Câu 4. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5;12,5)	[12,5;15,5)	[15,5;18,5)	[18,5;21,5)	[21,5;24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

- A. 10,75.
C. 4,63.
- B. 4,75.
D. 4,38.

Câu 5. Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ đúng số 3, kim phút OP chỉ đúng số 12. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng

- A. $\alpha = \frac{\pi}{22}$.
C. $\alpha = -\frac{\pi}{21}$.
- B. $\alpha = -\frac{2\pi}{45}$.
D. $\alpha = -\frac{\pi}{22}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Giá trị của u_3 là

- A. 10.
C. 7.
- B. 14.
D. 9

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

$-\infty \nearrow -2\sqrt{2} \searrow -\infty$ $+\infty \searrow 2\sqrt{2} \nearrow +\infty$

Đường

tiệm

cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có phương trình là

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = x - 1$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 3$.

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Giá trị của biểu thức $S = |\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AC}|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1)$, $B(1;2;3)$, $C(-1;2;0)$. Điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\cos(\overline{MA}, \overline{MB}) + \cos(\overline{MA}, \overline{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho $\overline{AM} = k\overline{AB} + k(3k+1)\overline{AC}$. Tổng $x + 2y + 3z - k$ bằng

- A. 4. B. 5. C. 7. D. 6.

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 75)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của đơn vị chục nghìn đồng) là

- A. 6,8. B. 7,3. C. 3,3. D. 46,1.

Câu 11. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 12. Cho các số thực dương a, b sao cho phương trình $(a+1)^x \cdot (b+1)^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{x_1 \cdot x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2 \leq 3\sqrt[3]{4}$. Giá trị $x_1 + x_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-2; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + b}{x^3 - 3x - 2} = c$. Tính $S = a^2 + b^3 + 6c$.

- A. 6. B. 10. C. 8. D. 12.

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số có 4 chữ số được lấy từ các chữ số $2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để lấy được số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a \leq b < c \leq d$.

- A. $\frac{2}{21}$. B. $\frac{8}{343}$. C. $\frac{80}{2401}$. D. $\frac{76}{2401}$.

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x - 1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 4. B. 2. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2AB = 2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 4$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overline{BM} = x\overline{BD}$, $\overline{SN} = y\overline{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tổng $2x + 3y$ bằng

- A. 4. B. $\frac{11}{7}$. C. 3. D. $\frac{22}{7}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $KABC$ có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$. Biết điểm K có tọa độ là các số dương và $OK = \sqrt{6}$. Giá trị a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$. B. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$. C. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$10(x^2 + y^2 - xy) - \log_3^2(x + y - 1) \geq x^3 + y^3 - 4?$$

- A. 25. B. 30. C. 40. D. 45.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' , biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60° .

- A. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$. B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$. C. $\frac{3a}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu từ một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

- A. 9930. B. 11950. C. 9650. D. 9950.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

- a) Hàm số $f(x)$ có cực tiểu bằng 3.
 b) Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.
 c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.
 d) Trên khoảng $(-3; -1)$, hàm số $y = 3 - 2f(2 - f(x))$ nghịch biến.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; -4)$, $B(1; 2; 0)$, $C(0; 2; 0)$.

- a) B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) .
 b) Không tồn tại điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $MA = MB = MC$.
 c) Gọi (H) là khối hộp nhận các điểm O, A, B, C làm đỉnh và có một đỉnh thuộc trục Ox khác O . Thể tích khối hộp (H) bằng 4.
 d) Nếu điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $AD = BD = CD$ và OD song song với mặt phẳng (ABC) thì tổng $2x + y - 3z$ bằng 6.

Câu 3. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130; 160)	[160; 190)	[190; 220)	[220; 250)	[250; 280)	[280; 310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- a) Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: 32, 64.
 b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.
 c) Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 30, 59.
 d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Nha Trang đồng đều hơn.

Câu 4. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, $(a, b > 0)$ trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên của tháng đó.

- a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$.
 b) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.

c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30, b = 15$. Khi đó có 2 ngày trong một tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 (miligam).

d) Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Trong các ngày: ngày thứ Hai của tuần thứ 2, ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất là M , ít nhất là m . Khi đó $M - m$ nhỏ hơn 23.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm P của SA và M là trung điểm của AE .

a) Đường thẳng PM vuông góc với đường thẳng CD .

b) Gọi J là điểm thoả mãn $\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{JS} = \vec{0}$. Khi đó, đường thẳng JC cắt mặt phẳng (MAB) .

c) Số đo của góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng α mà $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{31}}{14}a$.

Câu 6. Trong một trò chơi, người dẫn chương trình yêu cầu 18 thành viên đứng ngẫu nhiên, cách đều nhau và tạo thành một vòng tròn. Sau đó, người dẫn chương trình gọi ngẫu nhiên 4 thành viên để bốc thăm câu hỏi, các thành viên được chọn sẽ bốc câu hỏi từ một hộp đựng 8 câu hỏi khác nhau, mỗi người bốc đúng một câu hỏi và không bỏ lại vào hộp. Để hoàn thành trò chơi, mỗi người phải thực hiện yêu cầu của thăm mà người đó bốc được.

a) Số cách xếp các thành viên đứng thành vòng tròn là $18!$.

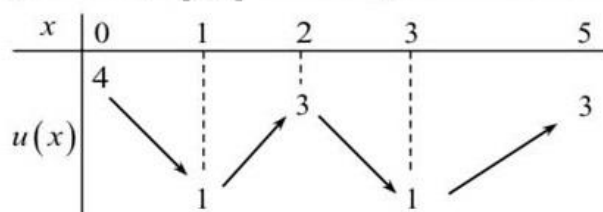
b) Số cách chọn ra 4 thành viên sao cho có đúng 2 người đứng cạnh nhau là 1404.

c) Số cách chọn ra 4 thành viên và đều thực hiện bốc câu hỏi là 12533760.

d) Xác suất để chọn được 4 thành viên không có 2 thành viên nào đứng cạnh nhau và đều thực hiện bốc câu hỏi bằng $\frac{91}{170}$.

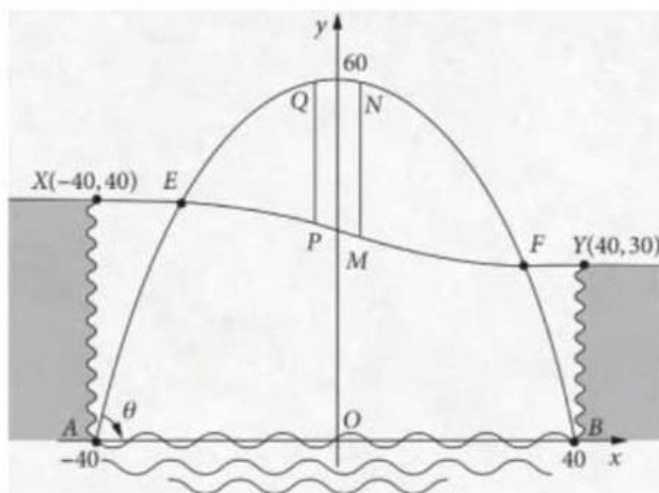
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m bé hơn 205 để bất phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} < m.u(x)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc khoảng $(0; 5)$?

- Câu 2.** Thành phố A dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Mô hình thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới. Cây cầu XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{1}{25600}x^3 + ax + b$ với a, b là các số thực. Hai cáp treo MN và PQ (cùng song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và cầu XY . Tổng độ dài hai đoạn cáp treo dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của đơn vị mét)? Biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua trục Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất.



- Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3; 4; 4), B(1; -1; 0), C(3; 2; 4), D(2; 0; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy) . Khi biểu thức $T = (\overline{MA} \cdot \overline{MB})^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?
- Câu 4.** Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn $(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}$. Có bao nhiêu số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức $P = \sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$?
- Câu 5.** Một loại đá quý có dạng khối lập phương, cạnh bằng 2 cm. Để làm đồ mỹ nghệ, với mỗi đỉnh của khối lập phương người ta cắt khối lập phương bởi một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của hình lập phương xuất phát từ đỉnh đó để tạo thành một khối mới có 14 mặt mà diện tích của tất cả các mặt bằng nhau. Thể tích của khối thu được sau khi cắt bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị cm^3)?
- Câu 6.** Một hộp đựng 8 thẻ được đánh số từ 2 đến 9. Bạn Lê lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Lần thứ hai, bạn Lê cũng lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Tiếp tục như vậy, sau năm lần bạn Lê đã ghi lại được 5 chữ số. Xác suất để trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4 là $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $5a - 2b$ bằng bao nhiêu?

.....**HẾT**.....
 Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.



ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH – NĂM HỌC 2024 – 2025

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HOÁ

ĐỀ MINH HOẠ

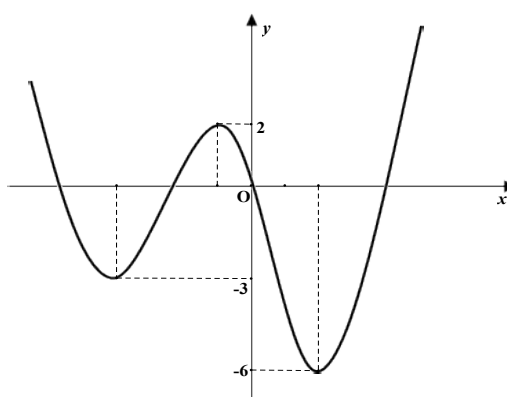
Môn: Toán 12

Thời gian: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

- A. 1. B. 4. C. 2. D. 3.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Khi đó, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ bằng

- A. $\overrightarrow{BD}$. B. $2\overrightarrow{OC'}$. C. $4\overrightarrow{AO}$. D. $2\overrightarrow{AC}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -3)$, $\vec{c} = (0; 3; -2)$.

Điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM} + \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$, tổng $x + y + z$ bằng

- A. 3. B. -3. C. 4. D. -2.

Câu 4. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

- A. 10,75. B. 4,75. C. 4,63. D. 4,38.

Câu 5. Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ đúng số 3, kim phút OP chỉ đúng số 12. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng

- A. $\alpha = \frac{\pi}{22}$. B. $\alpha = -\frac{2\pi}{45}$. C. $\alpha = -\frac{\pi}{21}$. D. $\alpha = -\frac{\pi}{22}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Giá trị của u_3 là

- A. 10. B. 14. C. 7. D. 9.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	$-2\sqrt{2}$	$+\infty$	$2\sqrt{2}$	$+\infty$

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

- A. $y = 2x + 1$. B. $y = x - 1$. C. $y = 2x - 3$. D. $y = x + 3$.

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Giá trị của biểu thức $S = |\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AC}|$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $y = 2\sqrt{3}$. D. $\sqrt{6}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;1;1), B(1;2;3), C(-1;2;0)$. Điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\cos(\overline{MA}, \overline{MB}) + \cos(\overline{MA}, \overline{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho $\overline{AM} = k\overline{AB} + k(3k+1)\overline{AC}$. Tổng $x + 2y + 3z - k$ bằng

- A. $\frac{19}{3}$. B. 5. C. 7. D. 6.

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 75)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị chục nghìn đồng) là

- A. 6,8. B. 7,3. C. 3,3. D. 46,1.

Câu 11. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$ trên đường tròn lượng giác là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 12. Cho các số thực dương a, b sao cho phương trình $(a+1)^x \cdot (b+1)^{x-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2 \leq 3\sqrt{4}$. Giá trị $x_1 + x_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-2; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(1; 2)$.

Câu 13. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + b}{x^3 - 3x - 2} = c$. Tính $S = a^2 + b^3 + 6c$.

- A. 6. B. 10. C. 8. D. 12.

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số có 4 chữ số được lấy từ các chữ số 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để lấy được số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a \leq b < c \leq d$.

A. $\frac{2}{21}$.

B. $\frac{8}{343}$.

C. $\frac{80}{2401}$.

D. $\frac{76}{2401}$.

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x - 1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2AB = 2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 4$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tổng $2x + 3y$ bằng

A. 4.

B. $\frac{11}{7}$.

C. 3.

D. $\frac{22}{7}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $KABC$ có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$. Biết điểm K có tọa độ là các số dương và $OK = \sqrt{6}$. Giá trị a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

B. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

C. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$10(x^2 + y^2 - xy) - \log_3(x + y - 1) \geq x^3 + y^3 - 4?$$

A. 25.

B. 30.

C. 40.

D. 45.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' , biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60° .

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu từ một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

A. 9930.

B. 11950.

C. 9650.

D. 9950.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

a) Hàm số $f(x)$ có cực tiểu bằng 3.

b) Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Trên khoảng $(-3; -1)$, hàm số $y = 3 - 2f(2 - f(x))$ nghịch biến.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; -4), B(1; 2; 0), C(0; 2; 0)$.

a) B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) .

- b) Không tồn tại điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $MA = MB = MC$.
- c) Gọi (H) là khối hộp nhận các điểm O, A, B, C làm đỉnh và có một đỉnh thuộc trục Ox khác O . Thể tích khối hộp (H) bằng 4.
- d) Nếu điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $AD = BD = CD$ và OD song song với mặt phẳng (ABC) thì tổng $2x + y - 3z$ bằng 6.

Câu 3. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130;160)	[160;190)	[190;220)	[220;250)	[250;280)	[280;310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- a) Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: 32,64.
- b) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.
- c) Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 30,59.
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Nha Trang đồng đều hơn.

Câu 4. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, ($a, b > 0$) trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên của tháng đó.

- a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$.
- b) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.
- c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30, b = 15$. Khi đó có 2 ngày trong một tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 (miligam).
- d) Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Trong các ngày: ngày thứ Hai của tuần thứ 2, ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất là M , ít nhất là m . Khi đó $M - m$ nhỏ hơn 23.

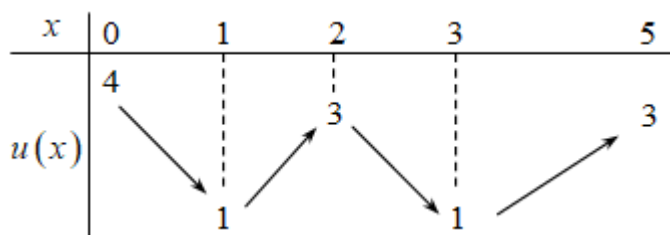
Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm P của SA và M là trung điểm của AE .

- a) Đường thẳng PM vuông góc với đường thẳng CD .
- b) Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{JS} = \vec{0}$. Khi đó, đường thẳng JC cắt mặt phẳng (MAB) .
- c) Số đo của góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng α mà $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.
- d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{31}}{14}a$.

- Câu 6.** Trong một trò chơi, người dẫn chương trình yêu cầu 18 thành viên đứng ngẫu nhiên, cách đều nhau và tạo thành một vòng tròn. Sau đó, người dẫn chương trình gọi ngẫu nhiên 4 thành viên để bốc thăm câu hỏi, các thành viên được chọn sẽ bốc câu hỏi từ một hộp đựng 8 câu hỏi khác nhau, mỗi người bốc đúng một câu hỏi và không bỏ lại vào hộp. Để hoàn thành trò chơi, mỗi người phải thực hiện yêu cầu của thăm mà người đó bốc được.
- Số cách xếp các thành viên đứng thành vòng tròn là $18!$.
 - Số cách chọn ra 4 thành viên sao cho có đúng 2 người đứng cạnh nhau là 1404.
 - Số cách chọn ra 4 thành viên và đều thực hiện bốc câu hỏi là 12533760.
 - Xác suất để chọn được 4 thành viên không có 2 thành viên nào đứng cạnh nhau và đều thực hiện bốc câu hỏi bằng $\frac{91}{170}$.

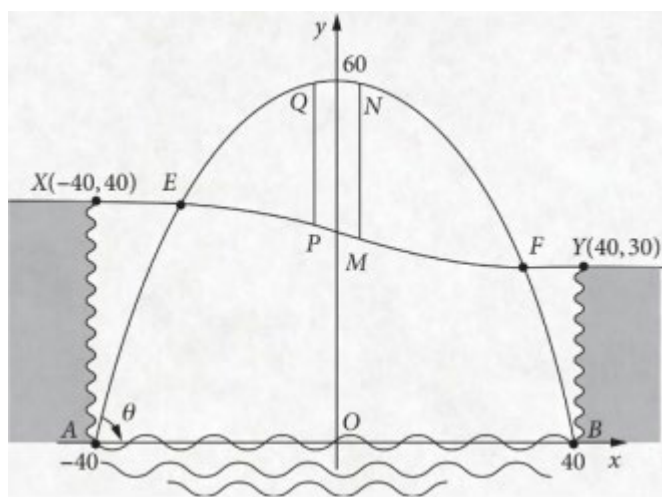
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

- Câu 1.** Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0;5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m bé hơn 205 để bất phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} < m.u(x)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc khoảng $(0;5)$?

- Câu 2.** Thành phố A dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Mô hình thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới. Cây cầu XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{1}{25600}x^3 + ax + b$ với a, b là các số thực. Hai cáp treo MN và PQ (cùng song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và cầu XY. Tổng độ dài hai đoạn cáp treo dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của đơn vị mét)? Biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua trục Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất.



- Câu 3.** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;4;4), B(1;-1;0), C(3;2;4), D(2;0;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy) . Khi biểu thức $T = (\overline{MA} \cdot \overline{MB})^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Câu 4. Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn

$$(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}.$$

Có bao nhiêu số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức $P = \sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)$?

Câu 5. Một loại đá quý có dạng khối lập phương, cạnh bằng 2cm . Để làm đồ mỹ nghệ, với mỗi đỉnh của khối lập phương người ta cắt khối lập phương bởi một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của hình lập phương xuất phát từ đỉnh để tạo thành một khối mới có 14 mặt mà diện tích của tất cả các mặt bằng nhau. Thể tích của khối thu được sau khi cắt bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị cm^3).

Câu 6. Một hộp đựng 8 thẻ được đánh số từ 2 đến 9. Bạn Lê lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Lần thứ hai, bạn Lê cũng lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Tiếp tục như vậy, sau năm lần bạn Lê đã ghi lại được 5 chữ số. Xác suất để trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4 là $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $5a - 2b$ bằng bao nhiêu?

∞ HẾT ∞

BẢNG ĐÁP ÁN

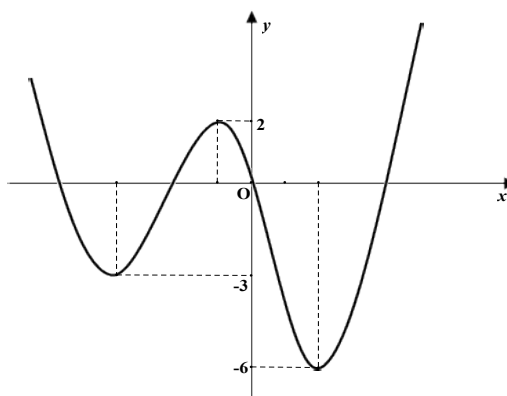
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
C	C	B	B	D	A	B	D	A	A	C	A	C	C	B	A	D	D	A	C

HƯỚNG DẪN GIẢI

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20.

Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Gọi giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành là a, b, c, d sao cho $a < b < c < d$.

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	a	b	c	d	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$										

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Khi đó, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ bằng

A. $\overrightarrow{BD}$.

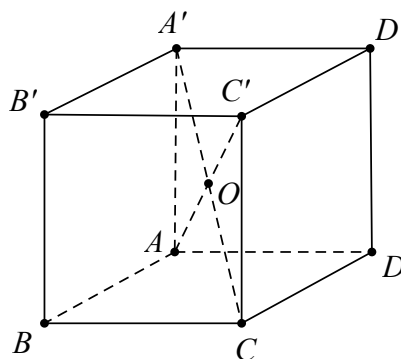
B. $2\overrightarrow{OC'}$.

C. $4\overrightarrow{AO}$.

D. $2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn C



Áp dụng quy tắc hình hộp $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC'} = 4\overrightarrow{AO}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vector $\vec{a} = (1; -1; 2)$, $\vec{b} = (2; 1; -3)$, $\vec{c} = (0; 3; -2)$.

Điểm $M(x; y; z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{OM} + \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c}$, tổng $x + y + z$ bằng

- A.** 3. **B.** -3 . **C.** 4. **D.** -2 .

Lời giải

Chon B

Ta có: $\overrightarrow{OM} + \vec{a} = 2\vec{b} - \vec{c} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (3; 0; -6)$.

Vậy $x + y + z = 3 + 0 - 6 = -3$.

Câu 4. Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là

- A.** 10,75. **B.** 4,75. **C.** 4,63. **D.** 4,38.

Lời giải

Chọn B

Cỡ mẫu là $n=3+12+15+24+2=56$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{56}$ là thời gian vào internet của 56 học sinh và giả sử dãy này được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

$\frac{n}{4}=14$ nên nhóm chứa Q_1 là $[12,5;15,5)$

$$Q_1 = 12,5 + \frac{14-3}{12} \cdot (15,5 - 12,5) = 15,25.$$

$\frac{3n}{4} = 42$ nên nhóm chứa Q_3 là $[18, 5; 21, 5)$

$$Q_3 = 18,5 + \frac{42 - (3 + 12 + 15)}{24} \cdot (21,5 - 18,5) = 20.$$

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 20 - 15,25 = 4,75$.

Câu 5. Trên đồng hồ tại thời điểm đang xét kim giờ OG chỉ đúng số 3, kim phút OP chỉ đúng số 12. Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng

- A.** $\alpha = \frac{\pi}{22}$. **B.** $\alpha = -\frac{2\pi}{45}$. **C.** $\alpha = -\frac{\pi}{21}$. **D.** $\alpha = -\frac{\pi}{22}$.

Lời giải

Chon D

Một giờ kim phút quay một góc -2π

Một giờ kim giờ quay một góc $-\frac{2\pi}{12} = -\frac{\pi}{6}$.

Giá sử sau thời gian t giờ, kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên. Ta có

$$t.(-2\pi) = -\frac{\pi}{2} + t. \left(-\frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow \frac{11t}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \frac{3}{11}(h).$$

Số đo góc lượng giác mà kim giờ quét được từ lúc xét đến khi kim phút và kim giờ gặp nhau lần đầu tiên bằng $\frac{3}{11} \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{22}$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) được cho bởi hệ thức truy hồi $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_n = u_{n-1} + n, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$. Giá trị của u_3 là

A. 10. **B.** 14. **C.** 7. **D.** 9.

- A.** 10. **B.** 14. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Chọn A

$$u_2 = u_1 + 2 = 7; u_3 = u_2 + 3 = 10.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ có bảng biến thiên dưới đây

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$	1	$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'		+	0	-	
y					

$\swarrow$ $-\infty$ $\searrow$ $-2\sqrt{2}$ $\swarrow$ $-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$ $\searrow$ $2\sqrt{2}$ $\nearrow$ $+\infty$

Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là

A. $y = 2x + 1.$

B. $y = x - 1.$

C. $y = 2x - 3.$

D. $y = x + 3.$

Lời giải

Chọn B

Ta có tiệm cận đứng của đồ thị là $x = 1$

Hai điểm cực trị là $A(1 - \sqrt{2}; -2\sqrt{2}); A(1 + \sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ suy ra trung điểm của AB là $I(1; 0)$ chính là tâm đối xứng của đồ thị. Vì giao điểm hai tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị và là giao điểm hai tiệm cận nên ta có $I(1; 0)$ thuộc tiệm cận xiên. Thử từng đáp án ta có đường tiệm cận xiên là $y = x - 1.$

Câu 8. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng 1. Giá trị của biểu thức $S = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}|$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}.$

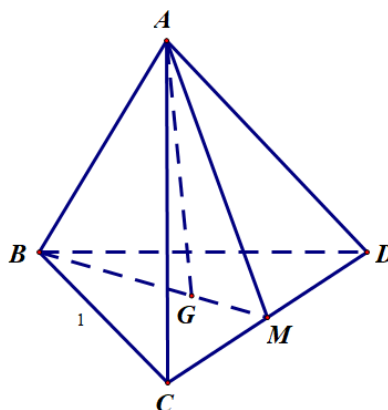
B. $\sqrt{3}.$

C. $y = 2\sqrt{3}.$

D. $\sqrt{6}.$

Lời giải

Chọn D



Gọi G là trọng tâm tam giác BCD ta có $AG \perp (BCD)$

$$BG = \frac{2}{3}BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\text{Có } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG}$$

$$\text{Vậy } S = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = 3AG = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6}.$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; 1; 1), B(1; 2; 3), C(-1; 2; 0)$. Điểm

$M(x; y; z)$ thỏa mãn $\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0$ và tồn tại số thực k sao cho

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k(3k + 1)\overrightarrow{AC}. \text{ Tổng } x + 2y + 3z - k \text{ bằng}$$

A. $\frac{19}{3}$.

B. 5.

C. 7.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k(3k+1)\overrightarrow{AC} \Rightarrow A, B, C, M \text{ đồng phẳng.}$$

$$\overrightarrow{AM}(x-2; y-1; z-1), \overrightarrow{AB}(-1; 1; 2), \overrightarrow{AC}(-3; 1; -1)$$

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} + k(3k+1)\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9k^2 - 4k + 2 \\ y = 3k^2 + 2k + 1 \\ z = -3k^2 + k + 1 \end{cases}$$

$$\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = 180^\circ$$

Do đó B, M, C thẳng hàng theo thứ tự đó.

$$\overrightarrow{BM}(-9k^2 - 4k + 1; 3k^2 + 2k - 1; -3k^2 + k - 2); \overrightarrow{BC}(-2; 0; -3)$$

$$B, M, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = n\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} -9k^2 - 4k + 1 = -2n \\ 3k^2 + 2k - 1 = 0 \\ -3k^2 + k - 2 = -3n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ n = \frac{2}{3} \\ k = -1 \\ n = 2 \end{cases}$$

Mà M nằm trong đoạn BC nên $k = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{-1}{3}; y = 2; z = 1 \Rightarrow x + 2y + 3z - k = \frac{19}{3}$.

Câu 10. Một siêu thị thống kê số tiền (đơn vị: chục nghìn đồng) mà 44 khách hàng mua hàng ở siêu thị đó trong một ngày. Số liệu được ghi lại trong bảng sau:

Nhóm	Giá trị đại diện	Tần số
[40 ; 45)	42,5	4
[45 ; 50)	47,5	14
[50 ; 55)	52,5	8
[55 ; 60)	57,5	10
[60 ; 75)	62,5	6
[65 ; 70)	67,5	2
		$n = 44$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị chục nghìn đồng) là

A. 6,8.

B. 7,3.

C. 3,3.

D. 46,1.

Lời giải

Chọn A

$$\bar{x} = \frac{585}{11}$$

Áp dụng công thức:

$$s = \sqrt{\frac{1}{44}(4.42,5^2 + 14.47,5^2 + 8.52,5^2 + 10.57,5^2 + 6.62,5^2 + 2.67,5^2) - \left(\frac{585}{11}\right)^2} \approx 6,8.$$

Câu 11. Số điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình $\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$ trên đường tròn lượng giác là

A. 2.

B. 3.

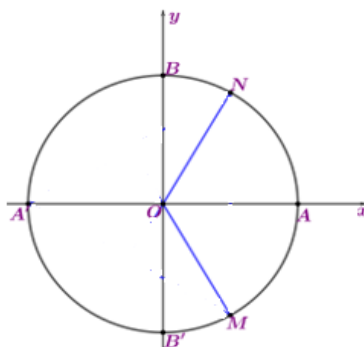
C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \sin x(\cos 2x + \cos x) = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x + \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos 2x = -\cos x \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \cos 2x = \cos(\pi - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \\ 2x = -\pi + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$



Điểm biểu diễn tất cả các nghiệm của phương trình là các điểm A, A', M, N .

Câu 12. Cho các số thực dương a, b sao cho phương trình $(a+1)^x \cdot (b+1)^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt

x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2 \leq 3\sqrt[3]{4}$. Giá trị $x_1 + x_2$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 0)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } (a+1)^x \cdot (b+1)^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x \log_{b+1}(a+1) + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x \log_{b+1}(a+1) - 1 = 0 \quad (1).$$

$$\text{Ta có } \Delta = \log_{b+1}^2(a+1) + 4 > 0, \forall a, b > 0.$$

Suy ra, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\text{Định lý Viet có } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\log_{b+1}(a+1) \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } t = x_1 + x_2 = -\log_{b+1}(a+1) < -\log_{b+1} 1 = 0 \Rightarrow t < 0.$$

Ta có

$$\left(\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4x_1 - 4x_2 \leq 3\sqrt[3]{4} \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} - 4t - 3\sqrt[3]{4} \leq 0 \Leftrightarrow -4t^3 - 3\sqrt[3]{4}t^2 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx -0,794 \\ t \geq 0,397 \end{cases}$$

$$\text{Vì } t < 0 \Rightarrow t \approx -0,794 \in (-1; 0).$$

Câu 13. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + b}{x^3 - 3x - 2} = c$. Tính $S = a^2 + b^3 + 6c$.

A. 6.

B. 10.

C. 8.

D. 12.

Lời giải

Chọn C

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + b}{x^3 - 3x - 2} = c$, $x^3 - 3x - 2 = 0$ nhận $x = -1$ là nghiệm, suy ra phương trình $ax^2 + 4x + b = 0$ nhận $x = -1$ là nghiệm suy ra $a + b - 4 = 0$ hay $b = 4 - a$.

Thay $b = 4 - a$ vào $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + b}{x^3 - 3x - 2} = c$ suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2 + 4x + 4 - a}{x^3 - 3x - 2} = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(ax^2 - a) + (4x + 4)}{x^3 - 3x - 2} = c \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(ax+4-a)}{(x+1)(x^2-x-2)} = c$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax+4-a}{x^2-x-2} = c$$

Do $x^2 - x - 2 = 0$ nhận $x = -1$ là 1 nghiệm nên $ax + 4 - a = 0$ cũng có nghiệm là $x = -1$ suy ra $a = 2$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+2}{x^2-x-2} = c \Leftrightarrow c = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Vậy } S = 2^2 + 2^3 - 6 \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

Câu 14. Gọi S là tập hợp các số có 4 chữ số được lấy từ các chữ số $\overline{2;3;4;5;6;7;8}$. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập S , tính xác suất để lấy được số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a \leq b < c \leq d$.

A. $\frac{2}{21}$.

B. $\frac{8}{343}$.

C. $\frac{80}{2401}$.

D. $\frac{76}{2401}$.

Lời giải

Chọn C

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 7^4$.

Gọi A là biến cố lấy được một số chẵn có dạng $\overline{abcd}$ mà $a \leq b < c \leq d$.

TH1: Nếu $d = 8$ thì $2 \leq a \leq b \leq c \leq 8 \Leftrightarrow 2 \leq a < b+1 < c+1 \leq 9$. Khi đó ứng với mỗi bộ số $a, b+1, c+1$ chọn từ các chữ số từ 2 đến 9 ta chỉ có một cách sắp xếp thỏa mãn. Suy ra số các số tạo ra là: C_8^3 .

TH2: Nếu $d = 6$ thì $2 \leq a \leq b \leq c \leq 6 \Leftrightarrow 2 \leq a < b+1 < c+1 \leq 7$. Tương tự như TH1 số các số tạo ra là: C_6^3 .

TH3: Nếu $d = 4$ thì $2 \leq a \leq b \leq c \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq a < b+1 < c+1 \leq 5$. Tương tự như TH1 số các số tạo ra là: C_4^3 .

$$\text{Vậy } n(A) = C_8^3 + C_6^3 + C_4^3 = 80. \quad P(A) = \frac{80}{7^4} = \frac{80}{2401}.$$

Câu 15. Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x - 1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 4.

B. 2.

C. $\sqrt{2}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta phải tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x - 1$ và trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = x - 1$.

Đường thẳng vuông góc với đường $y = x - 1$ có dạng: $y = -x + m$

Hoành độ các điểm A, B là các nghiệm của phương trình: $\frac{x^2}{x-1} = -x + m$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m+1)x + m = 0 \quad (*)$$

$$A, B \text{ tồn tại} \Leftrightarrow (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 6m + 1 > 0 \\ 2 - (m+1) + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{2} \\ m > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn AB là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+1}{4} \\ y_1 = -x_1 + m = -\frac{m+1}{4} + m = \frac{3m-1}{4} \end{cases}$$

Điểm I thuộc đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow y_1 = x_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{3m-1}{4} = \frac{m+1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1$

Khi đó phương trình (*) trở thành: $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nếu $x_A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y_A = -x_A - 1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$, $x_B = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $y_B = -x_B - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$

Vậy hai điểm cần tìm là: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$ và $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$.

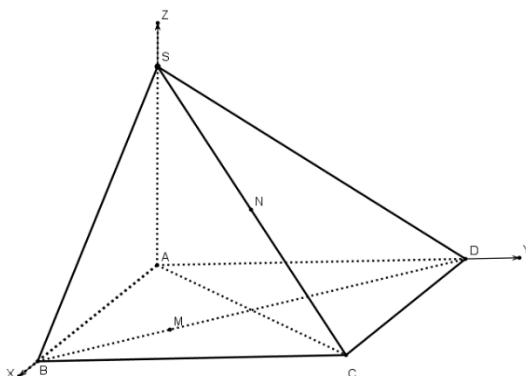
Độ dài đoạn thẳng AB là: 2.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2AB = 2\sqrt{2}$, đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = 4$. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{SC}$ và độ dài đoạn MN nhỏ nhất. Tổng $2x + 3y$ bằng

- A.** 4. **B.** $\frac{11}{7}$. **C.** 3. **D.** $\frac{22}{7}$.

Lời giải

Chọn A



MN nhỏ nhất thì MN là đoạn vuông góc chung giữa BD và SC . Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó tọa độ các điểm sẽ là:

$$A(0; 0; 0), S(0; 0; 4), B(\sqrt{2}; 0; 0),$$

$$D(0; 2\sqrt{2}; 0), C(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0); \overrightarrow{BD}(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 0); \overrightarrow{SC}(\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; -4)$$

$$\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BD} \Rightarrow M(-\sqrt{2}x + \sqrt{2}; 2x\sqrt{2}; 0) \text{ và } \overrightarrow{SN} = y\overrightarrow{SC} \Rightarrow N(\sqrt{2}y; 2y\sqrt{2}; -4y + 4)$$

$$\text{Suy ra } \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (\sqrt{2}y + \sqrt{2}x - \sqrt{2}; 2y\sqrt{2} - 2x\sqrt{2}; -4y + 4)$$

$$\text{Có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y - 2x + 2 + 8y - 8x = 0 \\ 2y + 2x - 2 + 8y - 8x + 16y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow 2x + 3y = 4.$$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện đều $KABC$ có các điểm A, B, C lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Oz sao cho $OA = OB = OC = a$. Biết điểm K có tọa độ là các số dương và $OK = \sqrt{6}$. Giá trị a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

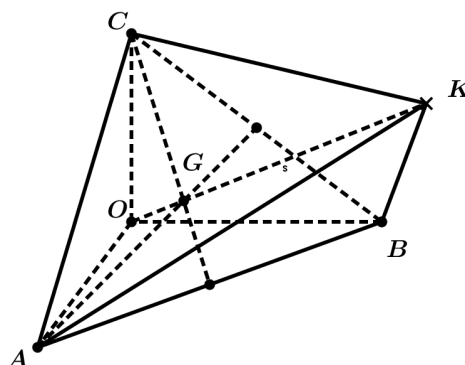
B. $\left(\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right)$.

C. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$.

D. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D



+) Ta có: $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ suy ra $\triangle ABC$ đều.

+) Hình chóp $O.ABC$ có $OA = OB = OC = a$, $\triangle ABC$ đều nên $O.ABC$ là hình chóp đều.

+) Tứ diện $KABC$ là tứ diện đều nên các cạnh của tứ diện đều $KABC$ có độ dài $a\sqrt{2}$.

+) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$ suy ra OG, KG cùng vuông góc với (ABC) suy ra O, G, K thẳng hàng.

Mặt khác: $OA < KA$, điểm K có tọa độ là các số dương suy ra G nằm giữa K và O .

+) Ta có $CG = \frac{2}{3} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

$$OG = \sqrt{OC^2 - CG^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \quad KG = \sqrt{KC^2 - CG^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Do $OK = OG + GK \Leftrightarrow \sqrt{6} = a\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \sqrt{2}$.

Câu 18. Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$10(x^2 + y^2 - xy) - \log_3^2(x + y - 1) \geq x^3 + y^3 - 4?$$

A. 25.

B. 30.

C. 40.

D. 45.

Lời giải

Chọn D

Ta có $10(x^2 + y^2 - xy) - \log_3^2(x + y - 1) \geq x^3 + y^3 - 4$

$$\Leftrightarrow 10(x^2 + y^2 - xy) - (x^3 + y^3) \geq \log_3^2(x + y - 1) - 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - xy)[10 - (x + y)] \geq [\log_3(x + y - 1) - 2][\log_3(x + y - 1) + 2], (*)$$

Do x, y là các số nguyên dương nên $x^2 + y^2 - xy > 0$, $\log_3(x + y - 1) + 2 > 0$

+) Nếu $x + y > 10$, $VT(*) < 0$, $VP(*) > 0$ suy ra $(*)$ vô nghiệm

+) Nếu $x + y \leq 10$, $VT(*) \geq 0$, $VP(*) \leq 0$ suy ra $(*)$ luôn đúng

Khi đó ta nhận được $x + y \leq 10$.

Các cặp số dương $(x; y)$ thỏa mãn: $(1; 1); (1; 2); \dots; (1; 9); (2; 1); (2; 2); \dots; (2; 8); \dots; (9; 1)$.

Vậy có $9 + 8 + 7 + \dots + 1 = 45$ cặp thỏa mãn.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AA' , biết góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60° .

A. $\frac{3a\sqrt{7}}{14}$.

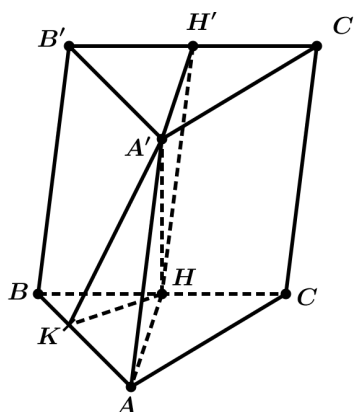
B. $\frac{a\sqrt{21}}{14}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



+) Gọi H, H' tương ứng là trung điểm của $BC, B'C'$. Theo giả thiết $A'H \perp (ABC)$.

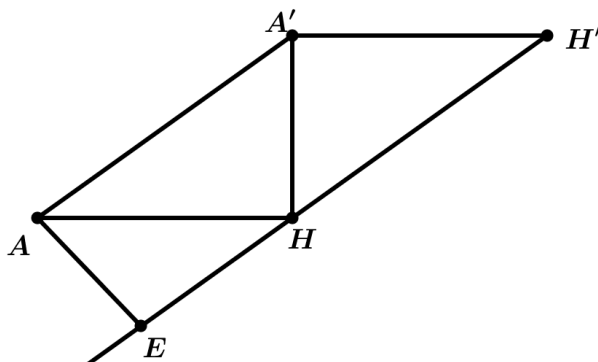
+) Kẻ $HK \perp AB$ tại K suy ra góc giữa $(ABA'B')$ và (ABC) là góc $\widehat{A'KH}$.

Theo giả thiết, góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(A'B'C')$ bằng 60° suy ra $\widehat{A'KH} = 60^\circ$.

+) Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $HK = \sin B.BH = \sin 60^\circ \cdot \frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$$A'H = \tan \widehat{A'KH} \cdot HK = \tan 60^\circ \cdot HK = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a}{4}$$

+) Ta có $BC \perp AH, BC \perp A'H$ suy ra $BC \perp (AHH'A')$
mà $BC \subset (BCC'B')$ nên $(AHH'A') \perp (BCC'B')$



Kẻ $AE \perp HH'$ tại E suy ra $AE \perp (BCC'B')$.

+) Ta có: $AA' \parallel (BCC'B') \supset B'C'$ nên $d(AA'; B'C') = d(A; (BCC'B')) = AE$

$$AE = d(H; AA') = \frac{A'H \cdot AH}{\sqrt{A'H^2 + AH^2}} = \frac{\frac{3a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{\left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{3a\sqrt{7}}{14}.$$

Câu 20. Có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu từ một hộp chứa 50 quả cầu được đánh số từ 1 đến 50 sao cho tích 3 số ghi trên 3 quả cầu lấy được là một số chia hết cho 8.

A. 9930.

B. 11950.

C. 9650.

D. 9950.

Lời giải

Chọn C

Chọn 3 quả cầu từ 50 quả cầu có C_{50}^3 cách.

Từ 1 đến 50 có 25 số lẻ, 13 số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4; 6 số chia hết cho 4 nhưng không chia hết cho 8; 6 số chia hết cho 8.

Ta xét các trường hợp chọn được ba quả cầu sao cho tích ba số trên quả cầu không chia hết cho 8:

+) Trường hợp 1: ba số trên quả cầu đều lẻ có C_{25}^3 cách.

+) Trường hợp 2: 1 quả cầu có số chỉ chia hết cho 2 (không chia hết cho 4 và 8 và 2 quả cầu ghi số lẻ có $13C_{25}^2$ cách

+) Trường hợp 3: 2 quả cầu có số chỉ chia hết cho 2 (không chia hết cho 4 và 8) và 1 quả cầu ghi số lẻ có $C_{13}^2 \cdot 25$.

+) Trường hợp 4: 1 quả cầu ghi số chia hết cho 4 (không chia hết cho 8) và 2 quả cầu ghi số lẻ có $6 \cdot C_{25}^2$ cách.

Vậy có $C_{50}^3 - (C_{25}^3 + 13C_{25}^2 + C_{13}^2 \cdot 25 + 6 \cdot C_{25}^2) = 9650$ cách lấy.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$	

a) Hàm số $f(x)$ có cực tiểu bằng 3.

b) Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2.

c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Trên khoảng $(-3; -1)$, hàm số $y = 3 - 2f(2 - f(x))$ nghịch biến.

Lời giải

a) Đ	b) S	c) Đ	d) S
------	------	------	------

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Hàm số $f(x)$ có cực tiểu bằng 3.

Trên đoạn $[1; 2]$, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến nên ta có $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ nên

b) Ta có $\sqrt{f(x) - 2} \geq 0 \Rightarrow y \geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\sqrt{f(x) - 2} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow x = 3 \notin [1; 2]$

Do đó hàm số $y = 2 + \sqrt{f(x) - 2}$ có giá trị nhỏ nhất bằng 2 là khẳng định sai.

c) Hàm số có tiệm cận đứng là $x = 0$, tiệm cận ngang là $y = 2$, chứng tỏ đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận vuông góc với nhau.

d) Ta có $y' = 2f'(2 - f(x)) \cdot f'(x)$

Ta có $\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow f(x) < 2 \Rightarrow f'(2 - f(x)) > 0$.

$\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow f'(x) < 0$

Do đó $\forall x \in (-3; -1) \Rightarrow y' > 0$. Chứng tỏ hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; -4), B(1; 2; 0), C(0; 2; 0)$.

- B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) .
- Không tồn tại điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $MA = MB = MC$.
- Gọi (H) là khối hộp nhận các điểm O, A, B, C làm đỉnh và có một đỉnh thuộc trục Ox khác O . Thể tích khối hộp (H) bằng 4.
- Nếu điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $AD = BD = CD$ và OD song song với mặt phẳng (ABC) thì tổng $2x + y - 3z$ bằng 6.

Lời giải

a) Đ	b) Đ	c) S	d) S
------	------	------	------

a) B là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oxy) .

b) M thuộc mặt phẳng $(Oyz) \Rightarrow M(0; y; z)$

Ta có: $MA = MB = MC \Leftrightarrow \begin{cases} MA^2 = MB^2 \\ MA^2 = MC^2 \end{cases} \Leftrightarrow$ không tìm được điểm M .

Vậy không tồn tại điểm M thuộc mặt phẳng (Oyz) thỏa mãn $MA = MB = MC$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (0; 0; 4), \overrightarrow{AC} = (-1; 0; 4) \Rightarrow \vec{n} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (0; -4; 0) = 4(0; -1; 0)$

Phương trình mặt phẳng $(ABC): x = 2$. Do đó khối hộp có một đỉnh thuộc trục Ox .

Thể tích khối hộp (H) là $V = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AO}| = \frac{4}{3}$.

d) Ta có $\overrightarrow{OD} = (x; y; z)$, do OD song song với mặt phẳng (ABC) nên $\overrightarrow{OD} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow y = 0$

Điểm $D(x; y; z)$ thỏa mãn $AD = BD = CD$ nên $\begin{cases} AD^2 = BD^2 \\ AD^2 = CD^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/2 \\ z = -2 \end{cases}$

Do đó $2x + y - 3z = 7$.

Câu 3. Bảng sau thống kê lại tổng số giờ nắng trong tháng 6 của các năm từ 2002 đến 2021 tại hai trạm quan trắc đặt ở Nha Trang và Quy Nhơn.

Số giờ nắng	[130;160)	[160;190)	[190;220)	[220;250)	[250;280)	[280;310)
Số năm ở Nha Trang	1	1	1	8	7	2
Số năm ở Quy Nhơn	0	1	2	4	10	3

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- Xét số liệu ở Nha Trang thì khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: 32, 64.
- Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì số giờ nắng trong tháng 6 của Quy Nhơn đồng đều hơn.
- Xét số liệu của Quy Nhơn ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) là: 30, 59.
- Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì số giờ nắng trong tháng 6 của Nha Trang đồng đều hơn.

Lời giải

a) Sai

Xét số liệu ở Nha Trang

Cỡ mẫu là $n = 1 + 1 + 1 + 8 + 7 + 2 = 20$

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_5 + x_6}{2}$.

Do x_5, x_6 đều thuộc nhóm $[220; 250)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

$$\text{Ta có } Q_1 = 220 + \frac{\frac{20}{4} - (1+1+1)}{8} \cdot (220 - 190) = 227,5.$$

Tứ phân vị thứ nhất Q_3 là $\frac{x_{15} + x_{16}}{2}$. Do x_{15}, x_{16} đều thuộc nhóm $[250; 280)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

$$\text{Ta có } Q_3 = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - (1+1+1+8)}{7} \cdot (280 - 250) = 267,14$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 267,14 - 227,5 = 39,64$.

b) Đúng

Xét số liệu ở Quy Nhơn

Cỡ mẫu là $n = 0 + 1 + 2 + 4 + 10 + 3 = 20$

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\frac{x_5 + x_6}{2}$. Do x_5, x_6 đều thuộc nhóm $[220; 250)$ nên nhóm này chứa Q_1

$$\text{Ta có } Q_1 = 220 + \frac{\frac{20}{4} - (1+2)}{4} \cdot (220 - 190) = 235.$$

Tứ phân vị thứ nhất Q_3 là $\frac{x_{15} + x_{16}}{2}$. Do x_{15}, x_{16} đều thuộc nhóm $[250; 280)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

$$\text{Ta có } Q_3 = 250 + \frac{\frac{3 \cdot 20}{4} - (1+2+4)}{10} \cdot (280 - 250) = 274$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 274 - 235 = 39 < 39,64$ nên số giờ nắng ở Quy Nhơn đồng đều hơn ở Nha Trang.

c) Đúng

Xét số liệu ở Quy Nhơn

$$\text{Số trung bình của mẫu số liệu là: } \bar{x} = \frac{0 \cdot 145 + 1 \cdot 175 + 2 \cdot 205 + 4 \cdot 235 + 10 \cdot 265 + 3 \cdot 295}{20} = 253$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{0 \cdot (145 - 253)^2 + 1 \cdot (175 - 253)^2 + 2 \cdot (205 - 253)^2 + 4 \cdot (235 - 253)^2 + \dots + 3 \cdot (295 - 253)^2}{20} = 936$$

Độ lệch chuẩn là $s = \sqrt{936} \approx 30,59$

d) Sai

Xét số liệu ở Nha Trang

$$\text{Số trung bình của mẫu số liệu là: } \bar{x} = \frac{1.145 + 1.175 + 1.205 + 8.235 + 7.265 + 2.295}{20} = 242.5$$

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{1.(145 - 242,5)^2 + 1.(175 - 242,5)^2 + 1.(205 - 242,5)^2 + \dots + 2.(295 - 242,5)^2}{20} = 1248,75$$

$$\text{Độ lệch chuẩn là } s = \sqrt{1248,75} \approx 35,34 \geq 30,59$$

Suy ra số giờ có nắng ở Nha Trang không đồng đều bằng Quy Nhơn.

Câu 4. Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$, ($a, b > 0$) trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên của tháng đó.

a) Số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một ngày của tháng không vượt quá $a + b$.

b) Trong một tháng số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng nhau sau ít nhất 7 ngày.

c) Giả sử ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một và trong tháng Một hệ số $a = 30, b = 15$. Khi đó có 2 ngày trong một tháng Một số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 (miligam).

d) Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Trong các ngày: ngày thứ Hai của tuần thứ 2, ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất là M , ít nhất là m . Khi đó $M - m$ nhỏ hơn 23.

Lời giải

a) Đúng

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \leq 1 \Rightarrow a - b \leq a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \leq a + b \quad (a, b > 0)$$

$$\Rightarrow P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \leq |a + b| = a + b$$

b) Đúng

$$\text{Ta có, chu kì tuần hoàn của hàm số là } \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7$$

Do đó, sau ít nhất 7 ngày thì số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí của một tháng bằng nhau

c) Sai

$$\text{Với } a = 30, b = 15 \text{ ta có } P(t) = \left| 30 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$$

$$\text{Khi đó } P(t) = 37,5 \Leftrightarrow \left| 30 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right| = 37,5 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \\ \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = -\frac{9}{2}(l) \end{cases}$$

$$+) \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{11}{3} + 7k \\ t = 6 + 7k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $t \in \mathbb{Z}$ nên $t = 6 + 7k$

Mà t là số ngày trong tháng Một nên $1 \leq t \leq 31 \Leftrightarrow 1 \leq 6 + 7k \leq 31 \Leftrightarrow -\frac{5}{7} \leq k \leq \frac{25}{7} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$

$$\Rightarrow t \in \{6; 13; 20; 27\}$$

Vì ngày thứ bảy của tuần đầu tiên cũng là ngày đầu tiên của tháng Một nên vào các ngày thứ 6, thứ 13, thứ 20 và ngày thứ 27 trong tháng Một có số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí bằng 37,5 (miligam).

d) Sai

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \leq 1 \Rightarrow a - b \leq a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \leq a + b \quad (a, b > 0)$$

$$\Rightarrow |a - b| \leq P(t) = \left| a + b \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \leq |a + b| = a + b$$

$$\text{Nên theo giả thiết ta có hệ } \begin{cases} a + b = 50 \\ |a - b| = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 15 \\ a = 15 \\ b = 35 \end{cases}$$

★ Trường hợp 1. $\begin{cases} a = 35 \\ b = 15 \end{cases}$

$$\text{Khi đó, } P(t) = \left| 35 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Hai của tuần thứ 2 là

$$P(2) = \left| 35 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(2 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 22,61$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Tư của tuần thứ 3 là

$$P(11) = \left| 35 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(11 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 46$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Ba của tuần thứ 4 là

$$P(17) = \left| 35 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(17 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 33,88$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 là

$$P(20) = \left| 35 + 15 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(20 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| = 42,5$$

Trong các ngày trên, số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất là $M = 46$, ít nhất là $m = 22,61$ nên $M - m = 23,39 > 23$

★ Trường hợp 2. $\begin{cases} a = 15 \\ b = 35 \end{cases}$

$$\text{Khi đó, } P(t) = \left| 15 + 35 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(t - \frac{37}{12} \right) \right] \right|$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Hai của tuần thứ 2 là

$$P(2) = \left| 15 + 35 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(2 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 13,92$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Tư của tuần thứ 3 là

$$P(11) = \left| 15 + 35 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(11 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 40,66$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Ba của tuần thứ 4 là

$$P(17) = \left| 15 + 35 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(17 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| \approx 12,38$$

Số miligam chất ô nhiễm trong ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 là

$$P(20) = \left| 15 + 35 \sin \left[\frac{2\pi}{7} \left(20 - \frac{37}{12} \right) \right] \right| = 32,5$$

Trong các ngày trên, số miligam chất ô nhiễm nhiều nhất là $M = 40,66$, ít nhất là $m = 12,38$ nên $M - m = 28,28 > 23$.

Câu 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi E là điểm đối xứng với D qua trung điểm P của SA và M là trung điểm của AE .

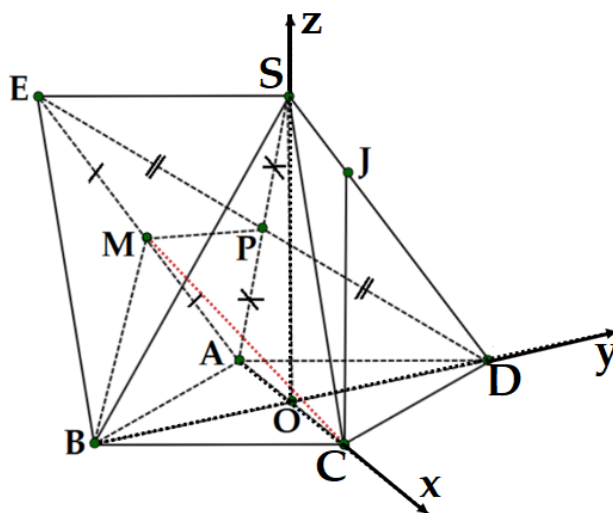
a) Đường thẳng PM vuông góc với đường thẳng CD .

b) Gọi J là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{JD} + 3\overrightarrow{JS} = \vec{0}$. Khi đó, đường thẳng JC cắt mặt phẳng (MAB) .

c) Số đo của góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng α mà $\cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

d) Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{\sqrt{31}}{14}a$.

Lời giải



a) Ta có: MP là đường trung bình của $\triangle ADE$ nên $MP \parallel AD$, mà $CD \perp AD \Rightarrow MP \perp CD$.

Suy ra: a) ĐÚNG.

b) Tứ giác $ADSE$ có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên $ADSE$ là hình bình hành $\Rightarrow SD \parallel AE \Rightarrow SD \parallel (ABE)$ (1).

Lại có: $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (ABE)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $(SCD) \parallel (ABE)$, mà $CJ \subset (SCD) \Rightarrow CJ \parallel (ABE) \Rightarrow$ b) SAI.

c) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Suy ra: $\widehat{SAO} = 60^\circ \Rightarrow \triangle SAC$

đều cạnh $a\sqrt{2}$. Suy ra: $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ sao cho:

$$O(0;0;0), S\left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{2}\right), A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), B\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right), C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right), D\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right).$$

Khi đó: P là trung điểm của SA , suy ra $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

Mà P là trung điểm của ED , suy ra $E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Lại có M là trung điểm của EA , suy ra $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MB} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{6}}{4}\right), \overrightarrow{MC} = \left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{6}}{4}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{4};-\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4}\right)$ cùng

phương với $\vec{n} = (1;-1;\sqrt{3})$. Mặt phẳng $(ABCD)$ có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OS} = \left(0;0;\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Ta có: $\cos \alpha = \cos(\vec{n}, \overrightarrow{OS}) = \frac{\vec{n} \cdot \overrightarrow{OS}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{OS}|} = \frac{1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow$ c ĐÚNG.

d) Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{6}}{2}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = \left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (SBC) :

$$\sqrt{3}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{3}(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x - \sqrt{3}y + z - \frac{\sqrt{6}}{2} = 0.$$

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) là:

$$d(M, (SBC)) = \frac{\left| \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} \right|}{\sqrt{3+3+1}} = \frac{\sqrt{42}}{14}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (SBC) bằng $a \frac{\sqrt{42}}{14} \neq a \frac{\sqrt{31}}{14} \Rightarrow$ d) SAI.

Câu 6. Trong một trò chơi, người dẫn chương trình yêu cầu 18 thành viên đứng ngẫu nhiên, cách đều nhau và tạo thành một vòng tròn. Sau đó, người dẫn chương trình gọi ngẫu nhiên 4 thành viên để bốc thăm câu hỏi, các thành viên được chọn sẽ bốc câu hỏi từ một hộp đựng 8 câu hỏi khác nhau, mỗi người bốc đúng một câu hỏi và không bỏ lại vào hộp. Để hoàn thành trò chơi, mỗi người phải thực hiện yêu cầu của thăm mà người đó bốc được.

- Số cách xếp các thành viên đứng thành vòng tròn là $18!$.
- Số cách chọn ra 4 thành viên sao cho có đúng 2 người đứng cạnh nhau là 1404.
- Số cách chọn ra 4 thành viên và đều thực hiện bốc câu hỏi là 12533760.
- Xác suất để chọn được 4 thành viên không có 2 thành viên nào đứng cạnh nhau và đều thực hiện bốc câu hỏi bằng $\frac{91}{170}$.

Lời giải

a) Sai vì 18 thành viên đứng ngẫu nhiên tạo thành một vòng tròn nên số cách xếp là $(18-1)! = 17!$

b) Đúng vì

+ Chọn 2 người đứng cạnh nhau: có 18 cách.

+ Ta cần chọn tiếp 2 người trong số 14 người (bỏ đi 2 người đã chọn và 2 đứng cạnh 2 người đã chọn) sao cho không có 2 người nào cạnh nhau: có $C_{14}^2 - 13$ cách.

Vậy có $18 \cdot (C_{14}^2 - 13) = 1404$ cách chọn ra 4 thành viên sao cho có đúng 2 người đứng cạnh nhau

c) Sai

+ Chọn 4 người từ 18 người: có C_{18}^4 cách.

+ Chọn 4 câu hỏi trong 8 câu hỏi dành cho 4 người: có A_8^4 cách.

Vậy có $C_{18}^4 \cdot A_8^4 = 5140800$ cách.

d) Sai.

+ Chọn 4 người bất kì từ 18 người: có $C_{18}^4 = 3060$ cách.

+ Chọn 4 người từ 18 người sao cho có đúng 2 thành viên nào đứng cạnh nhau: có 1404 cách.

+ Chọn 4 người từ 18 người sao cho có đúng 3 thành viên nào đứng cạnh nhau:

Trước hết ta chọn 3 thành viên nào đứng cạnh nhau: có 18 cách, ta chọn tiếp 1 người trong 13 người (bỏ đi 3 người đã chọn và 2 người đứng cạnh 3 người đã chọn đó): có 13 cách.

Suy ra có $18 \cdot 13 = 234$ cách.

+ Chọn 4 người từ 18 người sao cho có cả 4 thành viên nào đứng cạnh nhau: có 18 cách.

+ Chọn 4 người từ 18 người sao cho có 2 cụm 2 người đứng cạnh nhau mà 2 cụm này không đứng cạnh nhau.

Trước hết ta chọn 2 người đứng cạnh nhau: có 18 cách. Ta chọn tiếp 2 người đứng liền nhau trong 14 người còn lại (bỏ đi 2 người vừa chọn và 2 người đứng cạnh 2 người vừa chọn): có 14 cách.

Suy ra có $18 \cdot 14 = 252$ cách.

Tuy nhiên trong 252 cách trên mỗi cách được tính 2 lần, vậy có $\frac{252}{2} = 126$ cách xếp.

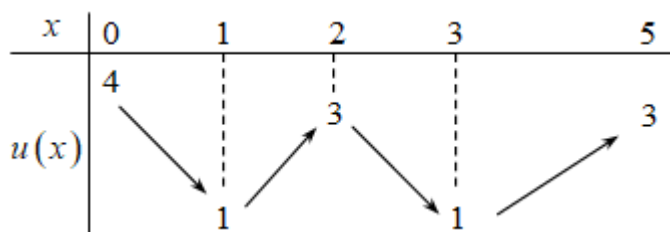
Vậy có $3060 - (1404 + 234 + 18 + 126) = 1278$ cách.

+ Chọn 4 câu hỏi trong 8 câu hỏi dành cho 4 người: có A_8^4 cách.

Do đó xác suất để chọn được 4 thành viên không có 2 thành viên nào đứng cạnh nhau và đều thực hiện bốc câu hỏi là $P(A) = \frac{1278 \cdot A_8^4}{3060 \cdot A_8^4} = \frac{71}{170}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1. Cho hàm số $u(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 5]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m bé hơn 205 để bất phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} < m \cdot u(x)$ nghiệm đúng với mọi giá trị của x thuộc khoảng $(0; 5)$?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy, với $\forall x \in (0; 5) \Rightarrow u(x) \in [1; 4]$ và $\min_{x \in (0; 5)} u(x) = 1$ tại $\begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$.

Bất phương trình $\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x} < m \cdot u(x) \Leftrightarrow m > \frac{\sqrt{3x} + \sqrt{10-2x}}{u(x)} = g(x)$.

Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (0; 5) \Leftrightarrow m > \max_{x \in (0; 5)} g(x)$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{10-2x}$, có tập xác định $D = [0; 5]$.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x}} - \frac{2}{2\sqrt{10-2x}} = \frac{3\sqrt{10-2x} - 2\sqrt{3x}}{2\sqrt{3x}\sqrt{10-2x}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{10-2x} = 2\sqrt{3x} \Leftrightarrow x = 3.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \sqrt{3x} - \sqrt{10-2x}$.

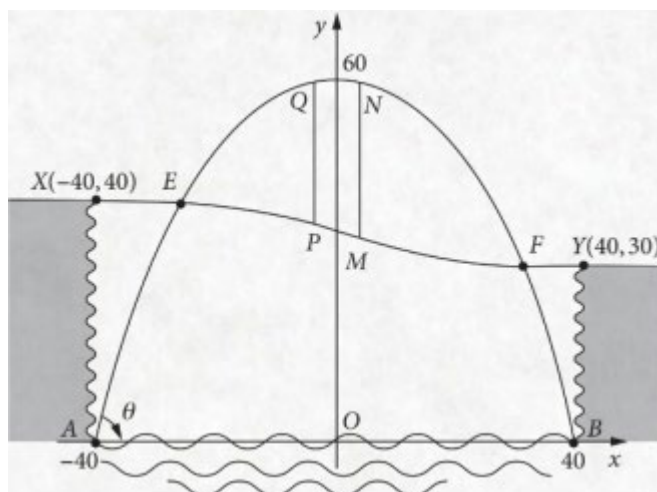
x	0	3	5
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\sqrt{10}$	5	$\sqrt{15}$

Do đó $\max_{x \in (0; 5)} f(x) = 5$ tại $x = 3$. Khi đó $\max_{x \in (0; 5)} g(x) = 5$ tại $x = 3$.

Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (0; 5) \Leftrightarrow m > \max_{x \in (0; 5)} g(x) \Leftrightarrow m > 5$.

Câu 2. Thành phố A dự định xây một cây cầu bắc qua một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Mô hình thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới. Cây cầu XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{1}{25600}x^3 + ax + b$ với a, b là các số thực. Hai cáp treo MN và PQ (cùng song

song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và cầu XY. Tổng độ dài hai đoạn cáp treo dài bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của đơn vị mét)? Biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua trục Oy và MN là đoạn có độ dài lớn nhất.



Lời giải

Vì đồ thị $y = \frac{1}{25600}x^3 + ax + b$ đi qua hai điểm $X(-40; 40)$ và $Y(40; 30)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -40a + b = \frac{85}{2} \\ 40a + b = \frac{55}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{16} \\ b = 35 \end{cases}$$

Ta được $y = \frac{1}{25600}x^3 - \frac{3}{16}x + 35$.

Xét parabol (P): $y = mx^2 + 60$, ($m < 0$) đi qua hai điểm $A(-40; 0)$, $B(40; 0)$ nên ta có

$$0 = 1600m + 60 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{80}. \text{ Do đó (P): } y = -\frac{3}{80}x^2 + 60.$$

Giả sử M có hoành độ là x, ($0 < x < 40$). Khi khoảng cách MN là

$$D(x) = -\frac{3}{80}x^2 + 60 - \left(\frac{1}{25600}x^3 - \frac{3}{16}x + 35 \right) = -\frac{1}{25600}x^3 - \frac{3}{80}x^2 + \frac{3}{16}x + 25.$$

$$\text{Ta có } D'(x) = -\frac{3x^2}{25600} - \frac{3}{40}x + \frac{3}{16}; D' = 0 \Leftrightarrow -\frac{3x^2}{25600} - \frac{3}{40}x + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 2,49 \\ x \approx -642,49 (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	2,49	40
$D'(x)$	+	0	-
$D(x)$			

Độ dài MN lớn nhất bằng 25,23 (m) khi $x = 2,49$ (m).

Khi đó hoành độ điểm P là $x = -2,49$ khi đó độ dài $PQ \approx 24,3(\text{m})$.

Vậy tổng độ dài MN và PQ bằng $25,23 + 24,3 = 49,53(\text{m})$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(3;4;4), B(1;-1;0), C(3;2;4), D(2;0;2)$. Điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy) .

Khi biểu thức $T = (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB})^2 + 2MB^2 + 3MC^2 - 4MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Nhận xét: $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Khi đó

$$T = (MA \cdot MB \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}))^2 + MA^2 + 2AB^2 + 3AC^2 - 4AD^2$$

Lại có $M, B \in (Oxy) \Rightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \leq 90^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \geq 0$. Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu của A lên (Oxy) .

$$\text{Do đó } T \geq MA^2 + 2AB^2 + 3AC^2 - 4AD^2$$

Biểu thức $T_{\min}$ khi và chỉ khi M là hình chiếu của A lên $(Oxy) \Rightarrow M(3;4;0)$.

Vậy $a + b + c = 7$.

Câu 4. Gọi x là số thực dương sao cho tồn tại số thực y không bé hơn 1 thỏa mãn

$$(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x}. \text{ Có bao nhiêu số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức } P = \sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right)?$$

Lời giải

Xét $y = 1$, $(xy^2 + x - 2y - 1) \log y = \log \frac{2y - x + 3}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5}{11}$ suy ra P không nguyên.

Xét $y > 1$, ta có

$$\begin{aligned} (xy^2 + x - 2y - 1) \log y &= \log \frac{2y - x + 3}{x} \\ \Leftrightarrow (xy^2 + x - 2y - 1) \log y &= \log \frac{(2y - x + 3) \log y}{x \log y} \\ \Leftrightarrow xy^2 \log y + \log(xy^2 \log y) &= (2y - x + 3) \log y + \log[(2y - x + 3) \log y]. \quad (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(x) = x + \log x$, $(x > 0)$.

Ta có $f'(x) = 1 + \frac{1}{x \ln 10} > 0, \forall x > 0$ nên

$$(*) \Leftrightarrow f(xy^2 \log y) = f[(2y - x + 3) \log y]$$

$$\Leftrightarrow xy^2 \log y = (2y - x + 3) \log y$$

$$\Leftrightarrow xy^2 - 2y + x - 3 = 0.$$

$$\text{Tồn tại số thực } y \text{ khi và chỉ khi } \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Vì x là số thực dương nên $0 < x \leq \frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

$$\text{Biểu thức } P = \sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{\pi}{4}\right) - 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi x}{5} + \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\text{Ta có } P' = \frac{2\sqrt{6}\pi}{5} \cos\left(\frac{\pi x}{5} - \frac{7\pi}{12}\right), P' = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{5} - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{65}{12} + 5k \Rightarrow x = \frac{5}{12}.$$

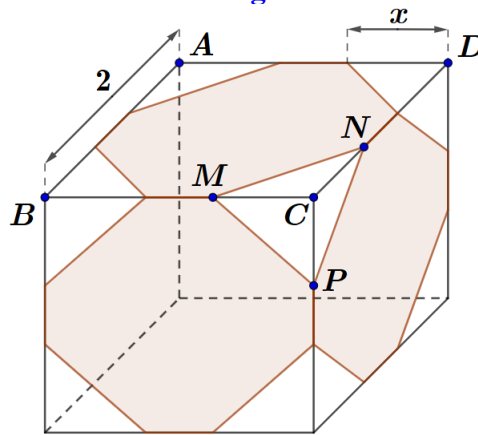
$$\text{Khi đó } P(0) = -3 - \sqrt{3}, P\left(\frac{5}{12}\right) = -2\sqrt{6}, P\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \approx 1,18.$$

Suy ra $-2\sqrt{6} \leq P(x) \leq 1,18$.

Có 6 số nguyên trong tập các giá trị của biểu thức P .

Câu 5. Một loại đá quý có dạng khối lập phương, cạnh bằng 2cm . Để làm đồ mỹ nghệ, với mỗi đỉnh của khối lập phương người ta cắt khối lập phương bởi một mặt phẳng vuông góc với đường chéo của hình lập phương xuất phát từ đỉnh để tạo thành một khối mới có 14 mặt mà diện tích của tất cả các mặt bằng nhau. Thể tích của khối thu được sau khi cắt bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của đơn vị cm^3).

Lời giải



Do mặt phẳng vuông góc với đường chéo của hình lập phương nên các phần bị cắt bỏ sẽ là hình chóp tam giác đều.

Khi đó, ta đặt cạnh bên của hình chóp đều hay $CM = CN = CP = x$ với $x < 1$.

$$\text{Do } \widehat{NCM} = \widehat{PCN} = \widehat{MCP} = 90^\circ \text{ nên } MN = NP = PM = x\sqrt{2} \Rightarrow S_{MNP} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}.$$

Khi đó diện tích còn lại trên các mặt hình lập phương sau khi cắt đi là $2^2 - \frac{1}{2}x^2 \cdot 4 = 4 - 2x^2$.

$$\text{Theo đề bài, ta có: } \frac{x^2\sqrt{3}}{2} = 4 - 2x^2 \Leftrightarrow x^2 \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{8}{4 + \sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \sqrt{3}}}.$$

Khi đó, thể tích của khối thu được sẽ là:

$$V = 2^3 - 8 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4 + \sqrt{3}}} \right)^3 \approx 5,8 (\text{cm}^3).$$

Câu 6. Một hộp đựng 8 thẻ được đánh số từ 2 đến 9. Bạn Lê lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Lần thứ hai, bạn Lê cũng lấy ngẫu nhiên một thẻ, ghi lại số trên thẻ rồi bỏ thẻ vào hộp. Tiếp tục như vậy, sau năm lần bạn Lê đã ghi lại được 5 chữ số. Xác suất để trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4 là $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $5a - 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xác suất để bốc được một số chia hết cho 4 là $\frac{1}{4}$ và xác suất bốc được một số không chia hết cho 4 là $\frac{3}{4}$.

Gọi A : “Trong 5 số ghi được có đúng 2 chữ số chia hết cho 4 ”

Do sau khi bốc xong bạn Lê sẽ bỏ thẻ bốc được lại vào hộp nên các lần bốc là độc lập với nhau nên theo công thức nhân xác suất, ta có:

$$P(A) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^3 C_5^2 = \frac{135}{512} \Rightarrow \begin{cases} a = 135 \\ b = 512 \end{cases} \Rightarrow 5a - 2b = -349.$$

∞ HẾT ∞