

BÀI 1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 CÁC ĐỊNH NGHĨA

- ① Vectơ là một đoạn thẳng có hướng (có phân biệt điểm đầu và điểm cuối).
- ② Vectơ - không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.
- ③ Ký hiệu vectơ: $\overrightarrow{AB}$ (điểm đầu là A , điểm cuối là B) hay $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$
- ④ Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Ký hiệu $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.
- ⑤ Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- ⑥ Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- ⑦ Hai vectơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ⑧ Hai vectơ bằng nhau là hai vectơ cùng hướng và có cùng độ dài. Tức là $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{cùng hướng} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$
- ⑨ Hai vectơ đối nhau là hai vectơ ngược hướng nhưng vẫn có cùng độ dài.
- ⑩ Các phép toán cộng, trừ, nhân vectơ với một số được định nghĩa tương tự trong mặt phẳng.

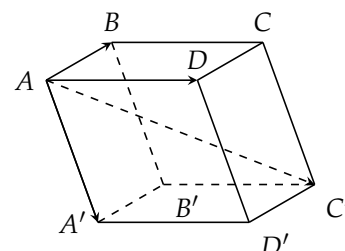
2 CÁC QUY TẮC TÍNH TOÁN VỚI VECTƠ

- ① Quy tắc ba điểm (với phép cộng): $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
- ② Quy tắc ba điểm (với phép trừ): $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.
- ③ Quy tắc ba điểm (mở rộng): $\overrightarrow{AX_1} + \overrightarrow{X_1X_2} + \overrightarrow{X_2X_3} + \dots + \overrightarrow{X_{n-1}X_n} + \overrightarrow{X_nB} = \overrightarrow{AB}$.
- ④ Quy tắc hình bình hành:
 - (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
 - (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE}$
trong đó $ABCD$ là hình bình hành và E là trung điểm của BD .

- ⑤ Quy tắc hình hộp:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$$

trong đó $ABCD.A'B'C'D'$ là một hình hộp.



3 MỘT SỐ HỆ THỨC VÉCTƠ TRỌNG TÂM, CẦN NHỚ

- ① I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$
(với O là một điểm bất kỳ).
- ② G là trọng tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ (với O là một điểm bất kỳ, M là trung điểm cạnh BC).
- ③ G là trọng tâm của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$ (với điểm O bất kỳ, A' là trọng tâm của ΔBCD)
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$ (với M, N là trung điểm 1 cặp cạnh đối diện).
- ④ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{a} = k.\vec{b}$
- ⑤ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^+ : \vec{a} = k.\vec{b}$
- ⑥ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^- : \vec{a} = k.\vec{b}$
- ⑦ Ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$

4 ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BA VÉCTƠ

Định nghĩa 1. Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng nào đó.

Hệ quả 1. Nếu có một mặt phẳng chứa vectơ này đồng thời song song với giá của hai vectơ kia thì ba vectơ đó đồng phẳng.

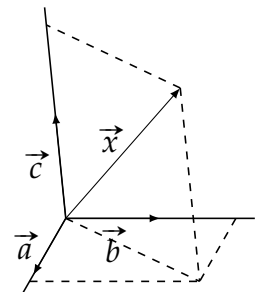
Định lý 1. (Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng) Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi tồn tại cặp số $(m; n)$ sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ (cặp số $(m; n)$ nêu trên là duy nhất).

 Bốn điểm phân biệt A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{AC} + n.\overrightarrow{AD}$.

5 PHÂN TÍCH MỘT VÉCTƠ THEO BA VÉCTƠ KHÔNG ĐỒNG PHẪNG

Định lý 2.

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng. Với mọi vectơ $\vec{x}$, ta đều tìm được duy nhất một bộ số $(m; n; p)$ sao cho $\vec{x} = m.\vec{a} + n.\vec{b} + p.\vec{c}$.



6 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VÉCTƠ

Định nghĩa 2.

① Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ thì $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})}$

② Nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

 Một số ứng dụng của tích vô hướng

② Công thức tính cosin của góc hợp bởi hai véctơ khác $\vec{0}$: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

③ Công thức tính độ dài của một đoạn thẳng: $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{AB^2}$

📁 DANG 1.1. Xác định vectơ và các khái niệm có liên quan

— Dựa vào tính chất hình học của các hình hình học cụ thể.

b) cùng phương $\overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{B'A'}; \overrightarrow{C'D'}; \overrightarrow{D'C'}$$
$$\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{C'C}, \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{D'D}$$

b) bằng $\overrightarrow{AO}$.

b) Ta có Các vectơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{O'C'}$.

BÀI 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD . Hãy xác định các vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) cùng hướng $\overrightarrow{AM}$.b) ngược hướng $\overrightarrow{MN}$.**Lời giải.**a) Các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$ là

$$\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DN}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{D'C'}$$

b) Các vectơ có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ ngược hướng với $\overrightarrow{MN}$ là

$$\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{D'A'}; \overrightarrow{C'B'}$$

□

BÀI 2. Cho bốn điểm A, B, C, D . Hãy xác định các vectơ trong các trường hợp sau:a) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B ;b) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B, C ;c) Có điểm đầu hoặc cuối là A, B, C, D .**Lời giải.**a) Các vectơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}$.b) Các vectơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CA}$.c) Các vectơ thỏa mãn là: $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{DB}$.

□

BÀI 3. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại I, K, L, M . Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có điểm cuối là các đỉnh của hình trụ. Hãy chỉ ra các vectơa) Cùng phương với $\overrightarrow{IA}$.b) Cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$.c) Ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.**Lời giải.**a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD'}$.b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MD}$.c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ bao gồm $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MD}$.

□

📁 DẠNG 1.2. Chứng minh đẳng thức vectơ*Để chứng minh đẳng thức vectơ ta thường sử dụng:**— Qui tắc cộng, qui tắc trừ ba điểm, qui tắc hình bình hành, quy tắc hình hộp.*

— Tính chất trung điểm, trọng tâm tam giác, tích một số với một vectơ... Để biến đổi về này thành về kia.

VÍ DỤ 1. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$$

 **Lời giải**

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện A, B, C, D . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD .

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

b) Cho G là trung điểm của I, J . Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

 **Lời giải**

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} \text{ và } \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ}$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } 2\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DJ} + \overrightarrow{CJ}) \\ &= \vec{0} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

b) Cho G là trung điểm của I, J . Chứng minh rằng: $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$, với mọi điểm M trong không gian.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = 4\overrightarrow{MG} + 2\vec{0} = 4\overrightarrow{MG}$$

(Vì I là trung điểm của AB, J là trung điểm của CD, G là trung điểm của IJ)

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$.

Lời giải.

Vì N là trung điểm của CD nên ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

$$\text{Suy ra, } 2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN}) = \vec{0} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) + \vec{0} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}.$$

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD . Gọi P, Q là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AD và BC sao cho: $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ}$.

Lời giải.

Ta có, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$.

$$\begin{aligned}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \\ &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \quad (3.1)$$

Ta lại có theo giả thiết:
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BQ} \end{cases} \quad (3.2)$$

Thay (1.2) vào (1.1) ta được:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{BQ} = 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}) \\ &= 2(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) \\ &= 2\overrightarrow{MP} + 2\overrightarrow{MQ} \quad (\text{ĐPCM}).\end{aligned}$$

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Lời giải.

a) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$. Ta có, O là trung điểm của AC và BD nên

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \quad (3.4)$$

Từ (1.3) và (1.4) suy ra, $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

b) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Ta có, $\overrightarrow{SA}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = \overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{OC}$

Suy ra, $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{SO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OC}^2$

Tương tự, $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = 2\overrightarrow{SO}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OD}^2$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên ta có $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OD}|$.

Từ đó suy ra, $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

□

📁 DẠNG 1.3. Tìm điểm thỏa mãn đẳng thức vectơ

Dựa vào các yếu tố cố định như điểm và véc-tơ.

— Các bước thực hành giải toán:

1. Biến đổi đẳng thức véc-tơ cho trước về dạng: $\overrightarrow{OM} = \vec{v}$.
Trong đó: Điểm O và véc-tơ $\vec{v}$ đã biết.
2. Nếu muốn dựng điểm M , ta lấy O làm gốc dựng một véc-tơ bằng véc-tơ $\vec{v}$, khi đó điểm ngọn của véc-tơ này chính là M .

— Ứng dụng tính chất tâm tỉ cự của hệ điểm

Với các điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ và các số $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ thỏa mãn điều kiện $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Tồn tại duy nhất điểm M sao cho: $\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$.

Điểm M như vậy gọi là tâm tỉ cự của hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ với các hệ số tương ứng là $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$.

Trong trường hợp $\alpha_i = \alpha_j \forall i, j$ điểm M gọi là trọng tâm của hệ điểm $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$.

— Một số kết quả thường sử dụng

Với A, B, C là các điểm cố định, $\vec{v}$ là véc-tơ đã biết.

- ① $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow M$ là trung điểm AB .
- ② Nếu A, B, C không thẳng hàng thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .
- ③ Tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ là mặt phẳng trung trực của AB .
- ④ Tập hợp điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MC}| = k|\overrightarrow{AB}|$ là mặt cầu tâm C bán kính bằng $k \cdot AB$.

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Xác định vị trí của điểm O sao cho:
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}$.

✍ **Lời giải**

Gọi G, G' là giao điểm các đường chéo của $ABCD$ và $A_1B_1C_1D_1$.

Khi đó ta có:

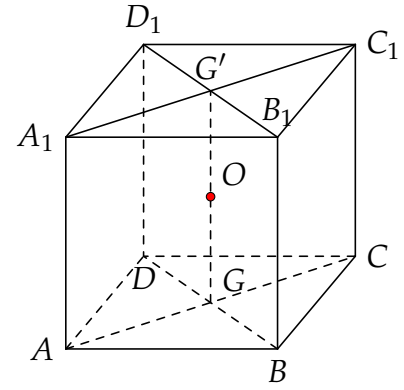
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}$$

$$= \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{G'A_1} +$$

$$\overrightarrow{G'B_1} + \overrightarrow{G'C_1} + \overrightarrow{G'D_1} + 4(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{G'O})$$

$$= 4(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{G'O}) = \vec{0}$$

Suy ra O là trung điểm GG' .



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Xác định các điểm I, H, G thỏa mãn

① $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

② $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

③ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Lời giải

① Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.

Mà $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$ với G là đỉnh còn lại của hình bình hành $ABGC$ vì $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$ với I là đỉnh còn lại của hình bình hành $AGID$.

Do đó AI là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD .

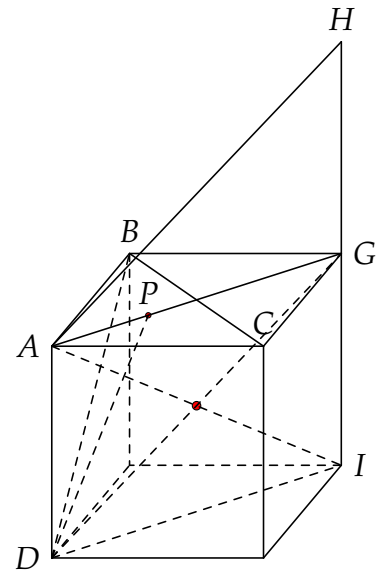
② Ta có: $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.

Mà $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}$.

Vậy $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DG}$ nên F là đỉnh còn lại của hình bình hành $ADGH$.

③ Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PG}$ với P là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G$ là điểm nằm trên đoạn thẳng DP sao cho $PD = 4PG$.

Điểm G thỏa mãn đẳng thức trên gọi là trọng tâm tứ diện.



□

VÍ DỤ 3. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta biến đổi đẳng thức về dạng:

$$|3\overrightarrow{MG}| = |3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MG}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}| = |\overrightarrow{GA}|$$

$\Rightarrow M$ thuộc mặt cầu tâm G , bán kính GA cố định.

□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ giác $ABCD$. Tìm điểm G thỏa mãn:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}.$$

Lời giải.

Gọi I là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow I$ cố định. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 4\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG}.$$

Điểm G được xác định nhờ đẳng thức trên. □

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$. Tìm điểm O thỏa mãn: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm của tứ giác $ABCD \Rightarrow G$ cố định. Khi đó ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OS} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{GS} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Điểm O được xác định nhờ đẳng thức trên. □

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$. Tìm điểm G thỏa mãn: $\overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BC}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - 2\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} = 3\overrightarrow{SG} - \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Điểm G là trọng tâm tam giác ABC . □

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm I thỏa mãn đẳng thức: $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

Lời giải.

Gọi G là trọng tâm tứ diện. Khi đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

$$2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = 4\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AI}.$$

$\Rightarrow G$ là điểm nằm trên AG thỏa mãn $4GI = AI$. □

BÀI 5. Trong không gian cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng. Tìm tập hợp các điểm N sao cho: $|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}| = |2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{BA}|$.

Lời giải.

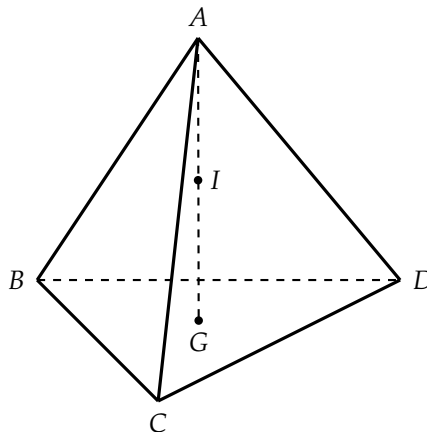
Gọi G là điểm thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow G$ cố định.

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC}| = |2\overrightarrow{BN} - 2\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{NG}| = |2\overrightarrow{AN}|$$

$\Rightarrow$ Tập hợp N là mặt phẳng trung trực của AG . □

BÀI 6. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $AB = 5$. Xác định vị trí của M để $P = 3\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.



Gọi I là điểm thỏa mãn hệ thức $3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ (1) $\Rightarrow I$ cố định (do A, B, C, D cố định).

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= 3 \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} \right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} \right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} \right)^2 \\
 &= 6MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2 + 2\overrightarrow{MI} \left(3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} \right) \\
 &= 6MI^2 + 3IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2
 \end{aligned}$$

Do đó: P nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ trùng I .

Gọi G là trọng tâm tam giác BCD ta có: $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{GI} \Rightarrow I$ là trung điểm GA .

Khi đó $IA^2 = \frac{25}{6}, IB^2 = IC^2 = ID^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow P = 50$. □

DẠNG 1.4. Tích vô hướng của hai vectơ

Phương pháp giải: dựa vào định nghĩa và tính chất của tích vô hướng (xem mục 6), các quy tắc tính toán vectơ (xem mục 2) và các hệ thức vectơ trọng tâm (xem mục 3) để giải toán.

VÍ DỤ 1. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chứng minh rằng: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

 **Lời giải**

Ta có: $VP = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{4}((\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2) = \frac{1}{4}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - (\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b})) = \vec{a} \cdot \vec{b} = VT$ □

VÍ DỤ 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{B'D'}$.

 **Lời giải**

Ta có: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$ (vì $AC \perp B'D' \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$) □

VÍ DỤ 3. Cho $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3, (\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$ và $|\vec{a} - \vec{b}|$

 **Lời giải**

Ta có: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 $\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 2^2 + 3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 7 \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$.

Ta có: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
 $\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 19 \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{19}$ □

VÍ DỤ 4. Cho $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$. Tính góc hợp bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

 **Lời giải**

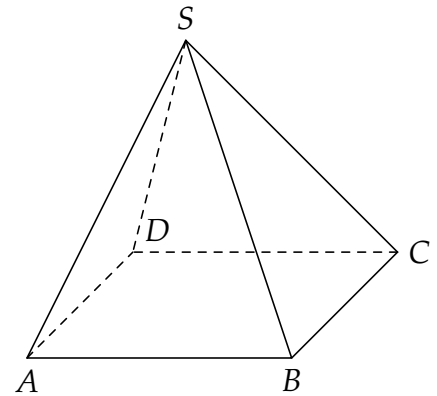
Ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-6}{3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$.

Vậy góc hợp bởi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 120° □

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có mặt đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Tính $\vec{SA} \cdot \vec{SC} - \vec{SB} \cdot \vec{SD}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{SA} \cdot \vec{SC} &= (\vec{SB} + \vec{BA}) \cdot (\vec{SD} + \vec{DC}) \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SD} + \vec{SB} \cdot \vec{DC} + \vec{BA} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC} \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SD} + \vec{SB} \cdot \vec{AB} + \vec{BA} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC} \quad (\text{vì } \vec{DC} = \vec{AB}) \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SD} + (-\vec{SB} \cdot \vec{BA} + \vec{BA} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot \vec{DC}) \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot (-\vec{SB} + \vec{SD} + \vec{DC}) \\ &= \vec{SB} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot (\vec{BS} + \vec{SD} + \vec{DC}) = \vec{SB} \cdot \vec{SD} + \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \vec{SB} \cdot \vec{SD} \\ &(\text{vì } \vec{BA} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{BA} \cdot \vec{BC} = 0). \\ \text{Vậy } \vec{SA} \cdot \vec{SC} - \vec{SB} \cdot \vec{SD} &= 0. \end{aligned}$$



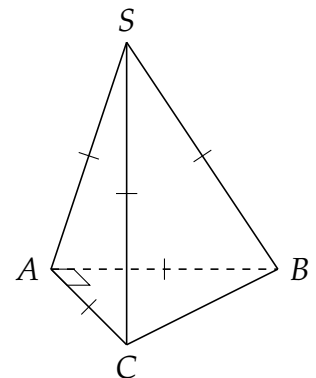
□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$.

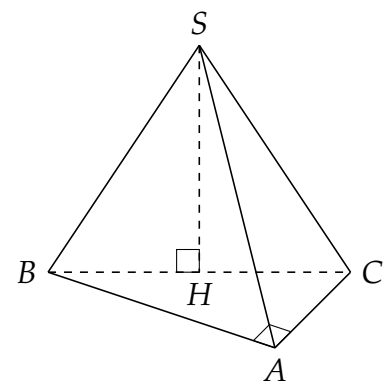
- ① Tính tích vô hướng $\vec{SA} \cdot \vec{AB}$;
- ② Tính tích vô hướng $\vec{SC} \cdot \vec{AB}$.

Lời giải

a) Ta có $\vec{SA} \cdot \vec{AB} = -\vec{AS} \cdot \vec{AB} = -AS \cdot AB \cdot \cos(\vec{AS}, \vec{AB})$
 $= -a \cdot a \cdot \cos SAB = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.



b) Ta có: $\vec{SC} \cdot \vec{AB} = (\vec{AC} - \vec{AS}) \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB} - \vec{AS} \cdot \vec{AB} = 0 - \vec{AS} \cdot \vec{AB}$
 $= -|\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos(\vec{AS}, \vec{AB}) = -a \cdot a \cdot \cos \widehat{SAB} = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.



□

BÀI 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$

Lời giải.

Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong $\triangle AMN$: $AM = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $MN = \frac{a}{2}$.

$$\text{Xét } \triangle AMN, \text{ ta có: } \cos \widehat{MAN} = \frac{AM^2 + AN^2 - MN^2}{2AM \cdot AN} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{6}.$$

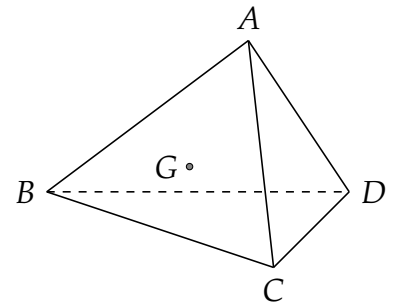
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AN}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \widehat{MAN} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{8}a^2$$

□

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều có cạnh bằng a , $CD = a\sqrt{2}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCA . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BC}$

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 3\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - AC^2 \\ &= a \cdot a \cdot \cos 60^\circ - a \cdot a \cdot \cos 60^\circ + 0 - a^2 = -a^2 \\ \text{Vậy } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD} &= -\frac{a^2}{6} \end{aligned}$$



□

BÀI 3. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a , M là trung điểm cạnh BC . Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Lời giải.

Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong $\triangle AMD$: $AM = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AD = a$.

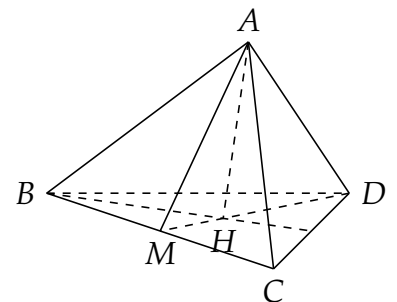
$$\text{Xét } \triangle AMD, \text{ ta có: } \cos \widehat{MAD} = \frac{AM^2 + AD^2 - MD^2}{2AM \cdot AD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AD}) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \cos \widehat{MAD} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2}a^2.$$

□

BÀI 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a , M là trung điểm cạnh AB . Tính $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM}$.

Lời giải.



Do các mặt của tứ diện $ABCD$ đều là tam giác đều, nên ta dễ dàng tính được độ dài các đoạn thẳng trong $\triangle MCD$: $MC = MD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CD = a$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM} = (-\overrightarrow{MC}) \cdot (-\overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = |\overrightarrow{MC}| \cdot |\overrightarrow{MD}| \cdot \cos(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}).$$

Xét $\triangle CMD$, ta có:

$$\cos(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}) = \cos \widehat{CMD} = \frac{MC^2 + MD^2 - CD^2}{2MC \cdot MD} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{DM} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{a^2}{4}.$$

□

BÀI 5. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a ; I, J lần lượt là trung điểm AB và CD . Tính $\overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AJ}$

Lời giải.

Gọi H là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCD \Rightarrow AH \perp (BCD)$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AJ} = (\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ}) = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CJ}.$$

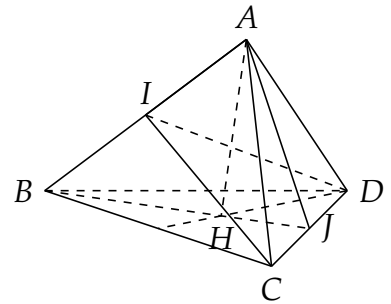
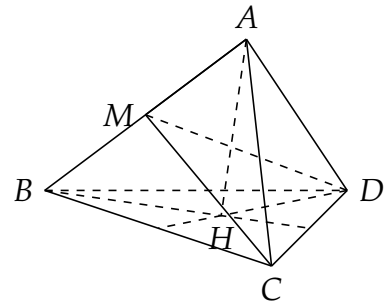
$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp BJ \\ CD \perp AH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ) \Rightarrow CD \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{CJ} = 0.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AI}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos \widehat{IAC} = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Tương tự: } -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CJ} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CJ}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CJ}) = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos \widehat{ACJ} = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{AJ} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \overrightarrow{AC}^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - a^2 = -\frac{1}{2}a^2.$$

□



📁 DẠNG 1.5. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng

Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, ta có thể chứng minh bằng một trong hai cách:

— Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.

— Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Nếu có $m, n \in \mathbb{R} : \vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh rằng 3 vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

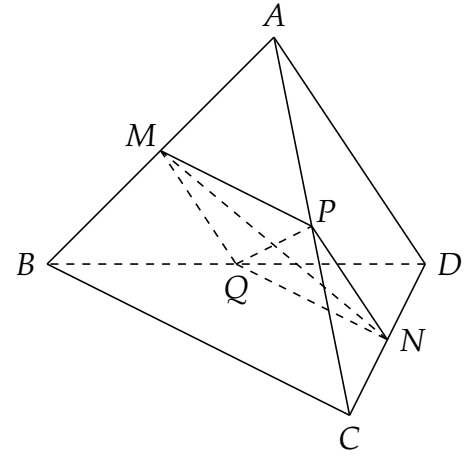
Lời giải

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BD .

Ta có $\begin{cases} PN \parallel MQ \\ PN = MQ = \frac{1}{2}AD \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác ($MNPQ$) chứa đường thẳng MN và song song với các đường thẳng AD và BC .

$\Rightarrow$ ba đường thẳng MN, AD, BC cùng song song với một mặt phẳng. Do đó 3 vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.



□

VÍ DỤ 2. Cho tam giác ABC . Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC) . Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} = -2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{NB}$ (2)

Cộng vế theo vế, ta được : $3\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB}$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Vậy : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

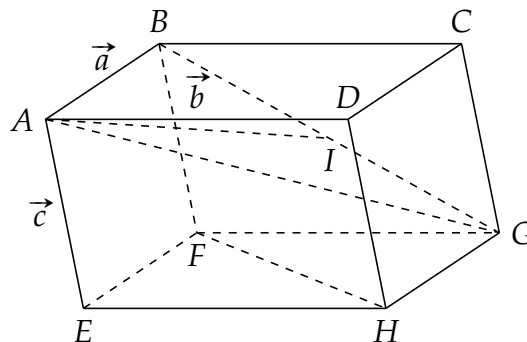
□

DẠNG 1.6. Phân tích một vectơ theo 3 vectơ không đồng phẳng cho trước

Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng, ta tìm các số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c}$. Gọi I là trung điểm của BG . hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Lời giải



Vì I là trung điểm của BG nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AG})$.

Theo quy tắc hình hộp, $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. $\square$

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD , I là trung điểm của BM . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

 Lời giải

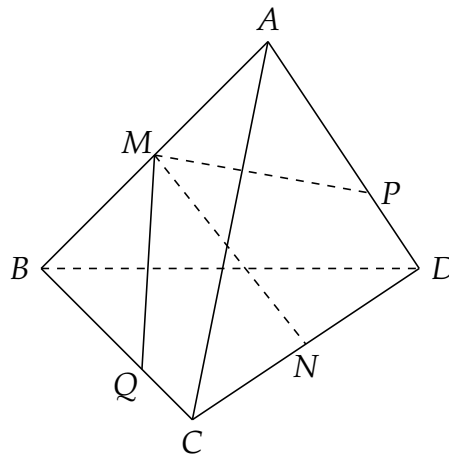
Ta có $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \vec{a} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$. $\square$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Trên các cạnh AD, BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải.



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \end{cases}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$ (1)

Mặt khác vì $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ nên $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BQ}$

Từ (1) ta suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BQ}) = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ})$.

Vì $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ nên $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ})$ suy ra $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}$ đồng phẳng.

Do đó 4 điểm M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng. $\square$

BÀI 2. Cho 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ khác $\vec{0}$ và 3 số thực $m, n, p \neq 0$. Chứng minh rằng ba vectơ $\vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b}, \vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c}, \vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Ta có: $\begin{cases} \vec{x} = m\vec{a} - n\vec{b} \Rightarrow p\vec{x} = mp\vec{a} - np\vec{b} & (1) \\ \vec{y} = p\vec{b} - m\vec{c} \Rightarrow n\vec{y} = np\vec{b} - nm\vec{c} & (2) \\ \vec{z} = n\vec{c} - p\vec{a} \Rightarrow m\vec{z} = mn\vec{c} - np\vec{a} & (3) \end{cases}$

Cộng vế theo vế, ta được $p\vec{x} + n\vec{y} + m\vec{z} = \vec{0}$

Vì $m, n, p \neq 0$ nên $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đồng phẳng. $\square$

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Gọi P, Q lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC}, k \neq 1$. Chứng minh M, N, P, Q đồng phẳng.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MP} = k(\overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MP}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD}}{1-k}.$$

$$\text{Tương tự } \overrightarrow{QB} = k\overrightarrow{QC} \Rightarrow \overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k}.$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC}}{1-k} = \frac{k}{k-1}(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) \quad (\text{Do } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}).$$

$$\text{Mặt khác } N \text{ là trung điểm của } CD \text{ nên } \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \frac{2k}{k-1}\overrightarrow{MN}.$$

Suy ra ba vectơ $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng hay bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. $\square$

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND}$, với $x, y \neq 1$. Tìm điều kiện giữa x và y để ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải.

Đặt $\overrightarrow{DA} = \vec{a}, \overrightarrow{DB} = \vec{b}, \overrightarrow{DC} = \vec{c}$ thì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} = x\overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DM} = x(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DM}) \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC}}{1-x} = \frac{\vec{a} - x\vec{c}}{1-x}, \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{NB} = y\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{1}{1-y}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{1-y}\vec{b}, \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DM} = -\frac{1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c}.$$

Ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{CD} = -\vec{c}; \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ cùng phương nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{CD}$, tức là:

$$-\frac{1}{1-x}\vec{a} + \frac{1}{1-y}\vec{b} + \frac{x}{1-x}\vec{c} = m(\vec{b} - \vec{a}) - n\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \left(m - \frac{1}{1-x}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{1-y} - m\right)\vec{b} + \left(n + \frac{x}{1-x}\right)\vec{c} = \vec{0}. \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{1-x} \\ m = \frac{1}{1-y} \\ n = -\frac{x}{1-x} \end{cases} \Rightarrow x = y.$$

Vậy ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x = y$. $\square$

DẠNG 1.7. Ứng dụng vectơ chứng minh bài toán hình học

Phương pháp giải:

- Chọn 3 vectơ không đồng phẳng làm cơ sở.
- Biểu diễn các vectơ cần tính toán về hệ 3 vectơ cơ sở.
- Dựa vào hệ thức biểu diễn ở trên ta tìm mối quan hệ giữa các vectơ cần xét.

VÍ DỤ 1. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BD$. Chứng minh rằng A, G, C' thẳng hàng.

 **Lời giải**

Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'D} + \overrightarrow{A'B}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Suy ra $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$ hay A, G, C' thẳng hàng. □

VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$, I là giao điểm của hai đường thẳng AB' và $A'B$. Chứng minh rằng các đường thẳng GI và CG' song song với nhau.

Lời giải

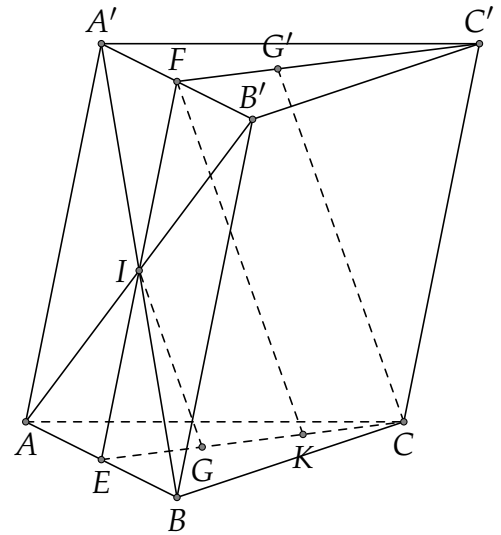
1. Phương pháp vectơ.

— Lấy trung điểm E, F (như hình vẽ).

— Ta có $\overrightarrow{CG'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'G'} = \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}\overrightarrow{C'F} = \overrightarrow{CC'} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{A'F} - \overrightarrow{A'C'}) = -\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}, (1).$

— Và $\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'C'}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{A'A} + \frac{1}{3}\overrightarrow{A'B'} - \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CG'}, (2)$

— Suy ra $\overrightarrow{GI}$ và $\overrightarrow{CG'}$ cùng phương $\Rightarrow GI \parallel CG'$.



2. Phương pháp cổ điển.

— Lấy các trung điểm E, F, K .

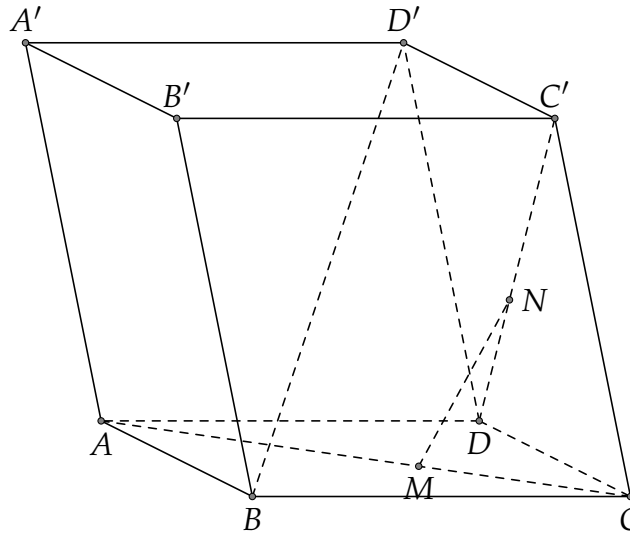
— Chứng minh $EG'CK$ là hình bình hành $\Rightarrow CG' \parallel FK, (1).$

— Chứng minh GI là đường trung bình của $\triangle EFK$: suy ra $GI \parallel FK, (2).$

— Kết hợp (1) và (2) suy ra $GI \parallel CG'$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$; các điểm M, N lần lượt thuộc các đường thẳng CA và DC' sao cho $\overrightarrow{MC} = m.\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ND} = m.\overrightarrow{NC'}$. Xác định m để các đường thẳng MN và BD' song song với nhau. Khi ấy, tính MN biết $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ và $BA = a, BB' = b, BC = c$.

Lời giải



Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BB'}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MC} = m\overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{ND} = m\overrightarrow{NC'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} = m(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BM}) \\ \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BN} = m(\overrightarrow{BC'} - \overrightarrow{BN}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\frac{m}{1-m}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{1-m}\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BN} = \frac{1}{1-m}\overrightarrow{BD} - \frac{m}{1-m}\overrightarrow{BC'} = \frac{1}{1-m}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{m}{1-m}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{BM} = -\frac{m}{1-m}\vec{a} + \frac{1}{1-m}\vec{c} \\ \overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} + \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = \frac{1+m}{1-m}\vec{a} - \frac{m}{1-m}\vec{b} - \frac{m}{1-m}\vec{c}$$

Ngoài ra $\overrightarrow{BD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ nên để $MN \parallel BD'$ thì cần có $\overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \frac{1+m}{1-m} = -\frac{m}{1-m}$.

Giải hệ phương trình trên ta tìm được $m = -0,5$.

Với $m = -\frac{1}{2}$ ta có $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \Rightarrow \overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{9}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a})$.

Do $\widehat{ABC} = \widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} = 60^\circ$ nên $2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} + 2\vec{c}\vec{a} = ab + bc + ca$.

Vậy $MN = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC . Một mặt phẳng (α) cắt các tia SA, SB, SC, SG lần lượt tại A', B', C', G' . Chứng minh rằng

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3\frac{SG}{SG'}$$

Lời giải.

Đặt $\frac{SA}{SA'} = a, \frac{SB}{SB'} = b, \frac{SC}{SC'} = c, \frac{SG}{SG'} = t$. Khi đó

$$3t\overrightarrow{SG'} = 3\overrightarrow{SG} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'}$$

Trong mặt phẳng (α) xét điểm I sao cho $a\overrightarrow{IA'} + b\overrightarrow{IB'} + c\overrightarrow{IC'} = \vec{0}$. Khi đó

$$3t\overrightarrow{SG'} = a\overrightarrow{SA'} + b\overrightarrow{SB'} + c\overrightarrow{SC'} = (a + b + c)\overrightarrow{SI}$$

nên $\overrightarrow{SG'}$ cùng phương với $\overrightarrow{SI}$ hay I là giao điểm của SG và (α) nghĩa là $I \equiv G'$. Suy ra

$$3t\overrightarrow{SG'} = (a + b + c)\overrightarrow{SG'}$$

hay $a + b + c = 3t$. □

BÀI 2. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm điểm M sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm AB, CD, EF . Ta có

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}.$$

Từ đó ta được

$$\begin{aligned} & MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với G . Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$, khi M trùng với trọng tâm G của tứ diện $ABCD$. □

BÀI 3. Cho ba tia Ax, By, Cz đôi một chéo nhau trong không gian. Ba điểm M, N, P lần lượt thay đổi trên các tia đó sao cho $AM = 2BN = 3CP$. Chứng minh rằng trọng tâm I của tam giác MNP luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Trên ba tia Ax, By, Cz lần lượt lấy các vec-tơ đơn vị $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng chiều với các tia chứa nó. Giả sử $\overrightarrow{AM} = t\vec{a}$. Khi đó,

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}t\vec{b}, \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}t\vec{c}.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là điểm tùy ý. Ta có

$$\begin{cases} 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \\ 3\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \end{cases}$$

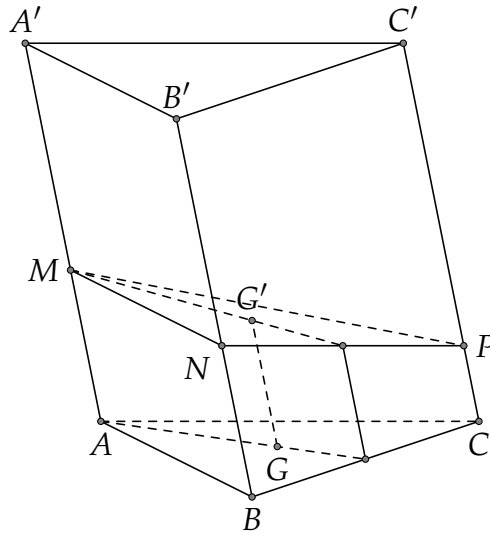
suy ra

$$\overrightarrow{GI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) = \frac{t}{3} \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right)$$

nên I thuộc tia Gt có gốc G , cùng chiều với vec-tơ $\vec{u} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. □

BÀI 4. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng a . Trên các cạnh bên AA', BB', CC' ta lấy tương ứng các điểm M, N, P sao cho $AM + BN + CP = a$. Chứng minh rằng mặt phẳng (MNP) luôn đi qua 1 điểm cố định.

Lời giải.



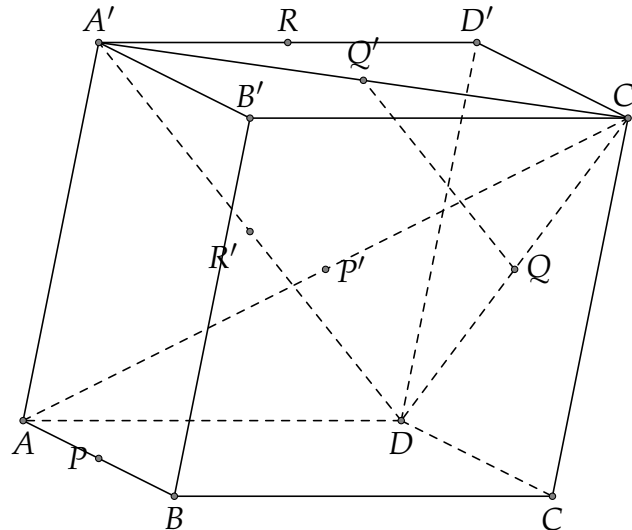
Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC$ và $\triangle MNP$ thì
$$\begin{cases} 3\overrightarrow{OG'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP} \\ 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta được $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$
 $\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \frac{AM}{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} + \frac{BN}{BB'} \cdot \overrightarrow{BB'} + \frac{CN}{CC'} \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$ (*). Do A, A', G cố định nên từ (*) ta suy ra G' cố định. Vậy (MNP) luôn đi qua điểm G' cố định xác định bởi hệ thức $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$. $\square$

BÀI 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có P và R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $A'D'$. Gọi P', Q, Q', R' lần lượt là tâm đối xứng của các hình bình hành $ABCD, CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'$.

- ① Chứng minh rằng $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.
- ② Chứng minh hai tam giác PQR và $P'Q'R'$ có cùng trọng tâm.

Lời giải.



- ① Theo tính chất đường trung bình trong tam giác ta có $\overrightarrow{DA'} = 2\overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{DD'} = -2\overrightarrow{RR'}$ và $\overrightarrow{DA} = -2\overrightarrow{PP'}$.
Theo quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'}$. Từ đó, $2\overrightarrow{QQ'} = -2\overrightarrow{RR'} - 2\overrightarrow{PP'}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = \vec{0}$.

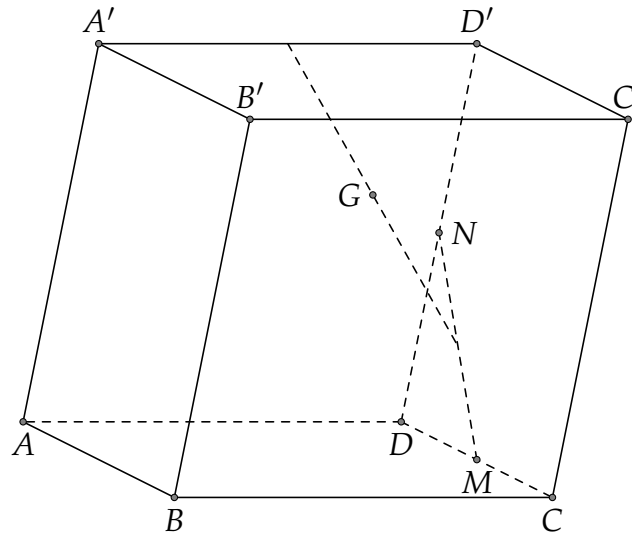
- ② Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác PQR và $P'Q'R'$. Khi đó
$$\begin{cases} \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AQ'} + \overrightarrow{AR'} = 3\overrightarrow{AG'} \\ \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AG} \end{cases}$$

Trừ vế theo vế ta được $\overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{QQ'} + \overrightarrow{RR'} = 3\overrightarrow{GG'} \Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Rightarrow G \equiv G'$.

□

BÀI 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh CD, DD' và G, G' lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $A'D'MN$ và $BCC'D'$. Chứng minh rằng đường thẳng GG' và mặt phẳng $(ABB'A')$ song song với nhau.

Lời giải.



Do G, G' lần lượt là trọng tâm của $A'D'MN$ và $BCC'D'$ nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AG} \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'} = 4\overrightarrow{AG'} \end{cases}$$

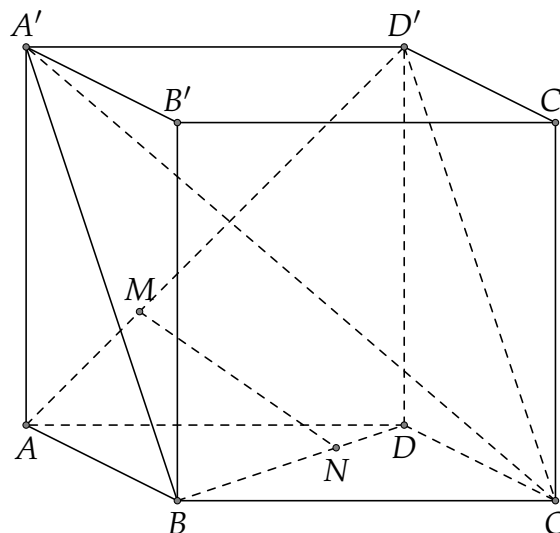
$$\begin{aligned} \text{Trừ vế theo vế ta được } 4\overrightarrow{GG'} &= (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{D'C}) + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{ND'} = 2\overrightarrow{A'B} + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DD'} \\ &= 2(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B'}) + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{A'A}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'A} + \frac{5}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{GG'}, \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B'} \text{ đồng phẳng} \\ &\Rightarrow GG' \parallel (ABB'A'). \end{aligned}$$

□

BÀI 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AD' và DB sao cho $\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k.\overrightarrow{NB}$ với $(k \neq 0, k \neq 1)$.

- ① Chứng minh rằng MN luôn song song với mặt phẳng (BCA') .
- ② Khi đường thẳng MN song song với đường thẳng $A'C$, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB .

Lời giải.



① Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$.

Do $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}(\vec{a} + \vec{c})$.

Tương tự $\overrightarrow{AN} = -\frac{k}{1-k}\vec{b} + \frac{1}{1-k}\vec{c}$.

Từ đó $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1+k}{1-k} \cdot \vec{c} + \frac{k}{1-k} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1+k}{1-k} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{k}{1-k} \cdot \overrightarrow{BA'}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'}$ đồng phẳng suy ra $MN \parallel (BCA')$ do $M \notin (BCA')$.

② Do $MN \parallel A'C$ nên $\overrightarrow{MN} = m \cdot \overrightarrow{A'C}$, do đó $\frac{k}{1-k} \cdot \vec{a} - \frac{k}{1-k} \cdot \vec{b} + \frac{1+k}{1-k} \cdot \vec{c} = -m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{b} + m \cdot \vec{c}$.

Suy ra $\begin{cases} \frac{k}{1-k} = -m \\ -\frac{k}{1-k} = m \\ \frac{1+k}{1-k} = m \end{cases}$. Giải hệ này ta được $k = -\frac{1}{2}$. Khi đó $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c})$.

Mặt khác $\overrightarrow{AD'} = \vec{a} + \vec{c}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{c}$ nên ta có ngay $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD'} = 0$ và $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$.
Như thế là MN vuông góc với AD' và DB .

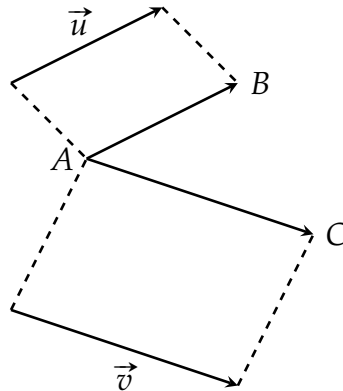
□

BÀI 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VEC-TƠ TRONG KHÔNG GIAN

Định nghĩa 1. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vec-tơ khác vec-tơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B, C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó, ta gọi $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vec-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$.



Định nghĩa 2. Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vec-tơ khác vec-tơ - không. Tích vô hướng của hai vec-tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, và được tính bởi công thức

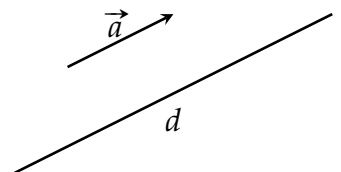
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

⚠ Trong trường hợp $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$, ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

2 GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

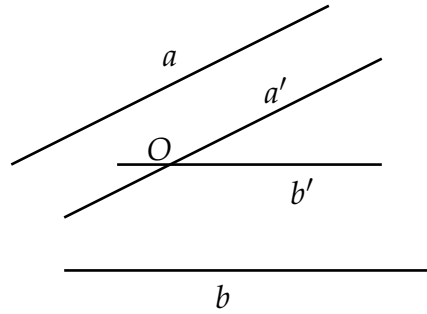
Định nghĩa 3.

Vec-tơ $\vec{a}$ khác vec-tơ - không được gọi là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vec-tơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d .



- ① Nếu $\vec{a}$ là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d thì vec-tơ $k \cdot \vec{a}$ với $k \neq 0$ cũng là vec-tơ chỉ phương của đường thẳng d .
- ② Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vec-tơ chỉ phương $\vec{a}$ của nó.
- ③ Hai đường thẳng song song với nhau khi và chỉ chúng là hai đường thẳng phân biệt và có hai vec-tơ chỉ phương cùng phương.

Định nghĩa 4. Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b .



- ① Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b ta có thể lấy điểm O thuộc một trong hai đường thẳng đó rồi vẽ một đường thẳng qua O và song song với đường thẳng còn lại.
- ② Nếu $\vec{u}$ và $\vec{v}$ lần lượt là vec-tơ chỉ phương của a và b , đồng thời $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$ thì góc giữa hai đường thẳng a và b bằng α nếu $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ và bằng $180^\circ - \alpha$ nếu $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$.
- ③ Nếu a và b là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .

B CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 2.1. Xác định góc giữa hai vec-tơ

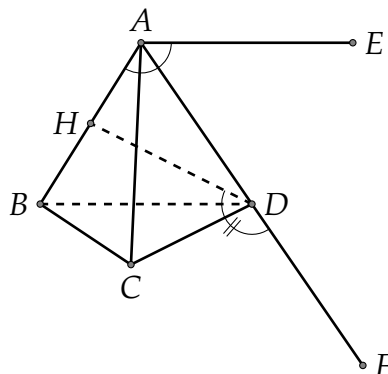
Ta xác định một điểm cho trước trên hình làm điểm gốc và dời các vec-tơ cần tính góc về điểm gốc đó.

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện đều $ABCD$ có H là trung điểm của cạnh AB . Hãy tính góc giữa các cặp vec-tơ sau đây:

① $\vec{AB}$ và $\vec{BD}$.

② $\vec{DH}$ và $\vec{AD}$.

Lời giải



① Dựng $\vec{AE} = \vec{BD}$. Ta có $(\vec{AB}, \vec{BD}) = (\vec{AB}, \vec{AE}) = \widehat{BAE} = 120^\circ$.

② Dựng $\vec{DF} = \vec{AD}$. Ta có $(\vec{DH}, \vec{AD}) = (\vec{DH}, \vec{DF}) = \widehat{HDF} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $SABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = a$. Gọi M là trung điểm của BC . Tính góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$.

 Lời giải

Gọi α là góc giữa hai vec-tơ $\overrightarrow{SM}$ và $\overrightarrow{AB}$, ta có $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$.

$$\text{Có } BC = AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = a\sqrt{2}, SM = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

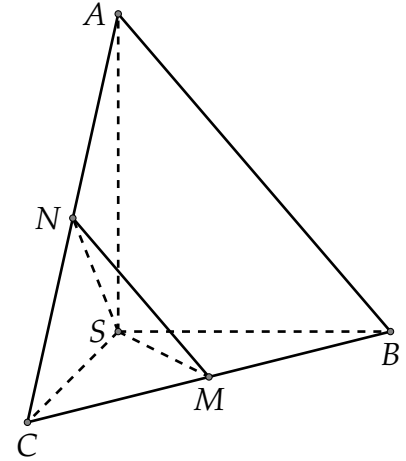
$$\text{Mặt khác ta có } \overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{SB}^2 - \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SA}) = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{Vậy } \cos \alpha = \frac{a^2}{2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Cách khác: Gọi N là trung điểm của AC , ta dễ dàng chứng minh được $\triangle SMN$ đều.

$$\text{Có } (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{NM}) = (\overrightarrow{MS}, \overrightarrow{MN}) = \widehat{NMS} = 60^\circ.$$



□

 DẠNG 2.2. Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Ta thường có hai phương pháp để giải quyết cho dạng toán này.

- **Phương pháp 1:** Sử dụng định nghĩa góc giữa hai đường thẳng, kết hợp sử dụng hệ thức lượng trong tam giác (định lý cos, công thức trung tuyến).
- **Phương pháp 2:** Sử dụng tích vô hướng của hai vec-tơ.

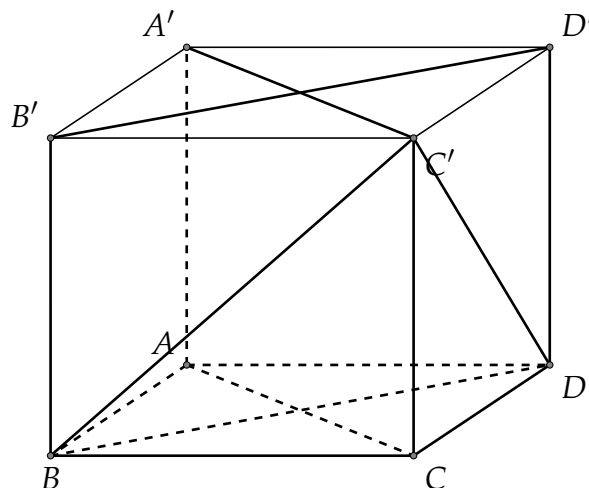
VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây

① AB và $A'D'$.

② AD và $A'C'$.

③ BC' và $B'D'$.

 Lời giải



① Ta có $A'D' \parallel AD$ nên $(AB, A'D') = (AB, AD) = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

② Ta có $A'C' \parallel AC$ nên $(AD, A'C') = (AD, AC) = \widehat{DAC} = 45^\circ$.

③ Ta có $B'D' \parallel BD$ nên $(BC', B'D') = (BC', BD) = \widehat{DBC'}$.

Ta có $BD = BC' = C'D = AB\sqrt{2}$ nên $\triangle BDC'$ đều, suy ra $\widehat{DBC'} = 60^\circ$.

Vậy $(BC', B'D') = 60^\circ$.

□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB .

Lời giải

Ta có SAB và SAC là tam giác đều, ABC và SBC là tam giác vuông cân cạnh huyền BC .

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, AB, BC , ta có $MN \parallel SB, NP \parallel AC$ nên $(AC, SB) = (NP, MN)$.

$$MN = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, NP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$AP = SP = \frac{BC}{2} = a, SA = a\sqrt{2}$$

$$\text{Nên } \triangle SAP \text{ vuông cân tại } P \Rightarrow MP = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \triangle MNP \text{ đều} \Rightarrow (AC, SB) = (NP, NM) = \widehat{MNP} = 60^\circ.$$

Cách khác:

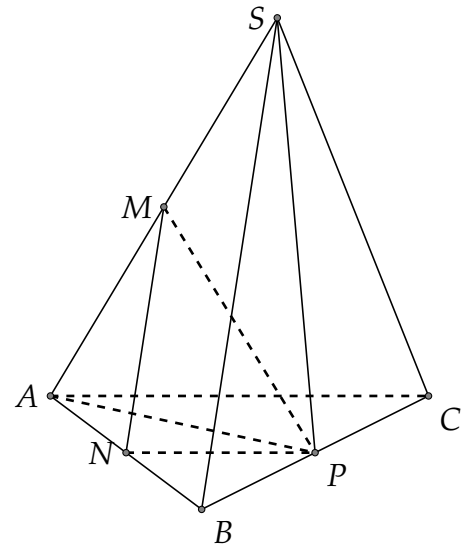
$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}) \cdot \overrightarrow{SB} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB}$$

$$= 0 - SA \cdot SB \cdot \cos \widehat{ASB} = -a^2.$$

$$\cos(AC, SB) = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB}|}{AC \cdot SB} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (AC, SB) = 60^\circ.$$

□



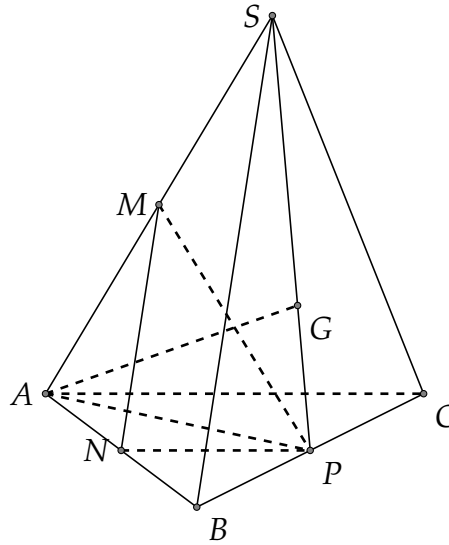
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh là $2a$, tam giác SBC vuông cân tại S , $SA = 2a$.

① Tính góc giữa hai đường thẳng SB và AC .

② Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC . Tính góc tạo bởi AG và SC .

Lời giải.



- ① Gọi M, N, P là trung điểm của SA, AB, BC , ta có $MN \parallel SB, NP \parallel AC$ nên $(SB, AC) = (MN, NP)$.

$\triangle ABC$ đều nên $AP = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $\triangle SBC$ vuông cân tại S nên $SP = \frac{BC}{2} = a$, mặt khác có $SA = 2a = \sqrt{SP^2 + AP^2}$ nên $\triangle SAP$ vuông tại P .

$$MN = \frac{SB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, NP = \frac{AC}{2} = a, MP = \frac{SA}{2} = a.$$

$$\cos \widehat{MNP} = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2MN \cdot NP} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow (SB, AC) = (MN, NP) = \widehat{MNP} \approx 69^\circ 17'.$$

- ② Ta có $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC} = (\overrightarrow{PG} - \overrightarrow{PA})(\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PS})$

$$= \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PG} \cdot \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 - \frac{PS^2}{3} - 0 + 0 = \frac{a^2}{3}.$$

$$\text{Có } SC = a\sqrt{2}, AG = \sqrt{AP^2 + PG^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{3}.$$

$$\cos(SC, AG) = \frac{|\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{SC}|}{SC \cdot AG} = \frac{\frac{a^2}{3}}{a\sqrt{2} \cdot \frac{2a\sqrt{7}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{14}} \Rightarrow (SC, AG) \approx 82^\circ 19'.$$

□

BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD .

Lời giải.

Kẻ $MN \parallel BD, N \in AD$, ta có $(CM, BD) = (CM, MN)$.

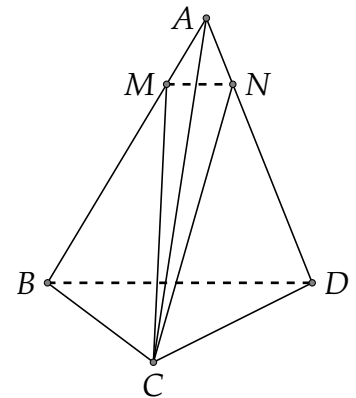
Do $ABCD$ là tứ diện đều nên ta có

$$CM = CN = \sqrt{BM^2 + BC^2 - 2 \cdot BM \cdot BC \cdot \cos 60^\circ} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

$$MN = \frac{BD}{4} = \frac{a}{4}.$$

$$\cos \widehat{CMN} = \frac{MC^2 + MN^2 - CN^2}{2 \cdot MC \cdot MN} = \frac{1}{2\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow (CM, BD) = (CM, MN) = \widehat{CMN} \approx 82^\circ 1'.$$

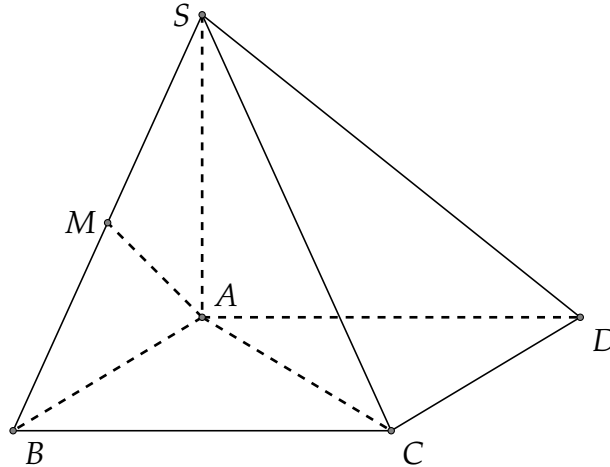


□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , các tam giác SAB và SAD cùng vuông góc tại A . Biết rằng $SA = a\sqrt{2}$, gọi M là trung điểm của cạnh SB .

- ① Tính góc tạo bởi hai vec-tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{SD}$.
- ② Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AM và SC .

Lời giải.



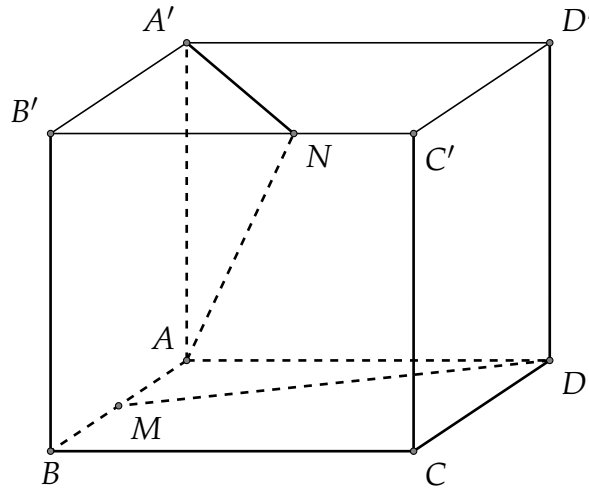
- ① Có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AS} = a^2$
 Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = a\sqrt{3}$.
 Vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SD}) = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SD}}{AC \cdot SD} = \frac{a^2}{a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SD}) \approx 65^\circ 54'$.

- ② $\triangle SAB$ vuông tại A nên $AM = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + SA^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 Có $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{SA} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$
 Nên $SA \perp AC \Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$.
 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}^2)$
 $= \frac{1}{2} \left(a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 + 0 - 2a^2 \right) = -\frac{a^2}{2}$
 $\cos(AM, SC) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{SC}|}{AM \cdot SC} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2a} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Rightarrow (AM, SC) \approx 73^\circ 13'$.

□

BÀI 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a , gọi M là trung điểm của AB , N là điểm trên cạnh $B'C'$ sao cho $B'N = 2C'N$. Tính $\cos$ của góc tạo bởi hai đường thẳng DM và AN .

Lời giải.



Ta có $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'N} = \overrightarrow{AA'} \cdot (\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0 + \overrightarrow{BB'} \cdot \overrightarrow{B'N} = 0$

Vậy $AA' \perp A'N$ nên $AN = \sqrt{AA'^2 + A'N^2} = \sqrt{AA'^2 + A'B'^2 + B'N^2} = \frac{a\sqrt{22}}{3}$.

$$DM = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM} &= (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'N}) \cdot (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &\quad - \overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{B'N} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 + \frac{AB^2}{2} + 0 - 0 - 0 - \frac{2AD^2}{3} = \frac{a^2}{2} - \frac{2a^2}{3} = -\frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Có } \cos(\angle AN, DM) = \frac{|\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{DM}|}{AN \cdot DM} = \frac{\frac{a^2}{6}}{\frac{a\sqrt{22}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{110}} \quad \square$$

DẠNG 2.3. Sử dụng tính chất vuông góc trong một phẳng.

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC .
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ .

VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD , chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của các đường thẳng AB và CD .

Lời giải

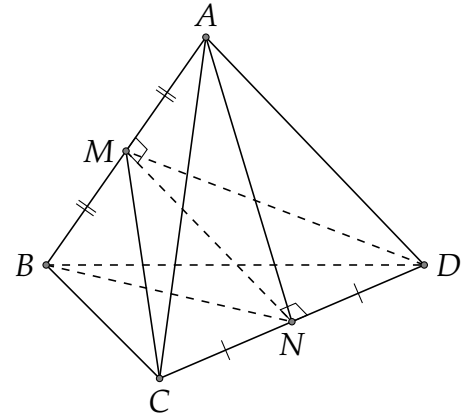
Từ giả thiết suy ra các tam giác ABC, ABD đều nên $DM = CM$, do đó $\triangle MCD$ cân tại M .

Từ đó suy ra $MN \perp CD$.

Mặt khác $\triangle BCD = \triangle ACD$ nên $BN = AN$, do đó $\triangle NAB$ cân tại N .

Từ đó suy ra $NM \perp AB$.

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và CD .



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC . Chứng minh rằng:

① $SH \perp AC$.

② $AB \perp BC$.

Lời giải

① Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

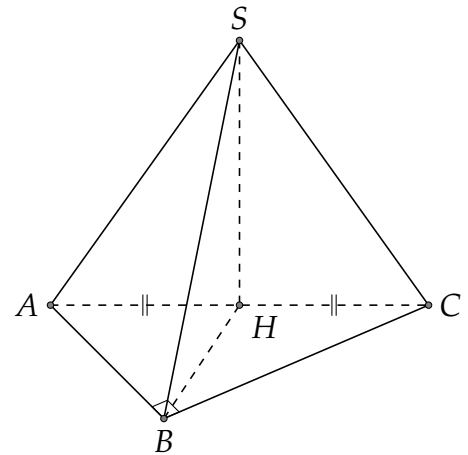
② Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)

Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2. \quad (2)$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC , ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

Lời giải

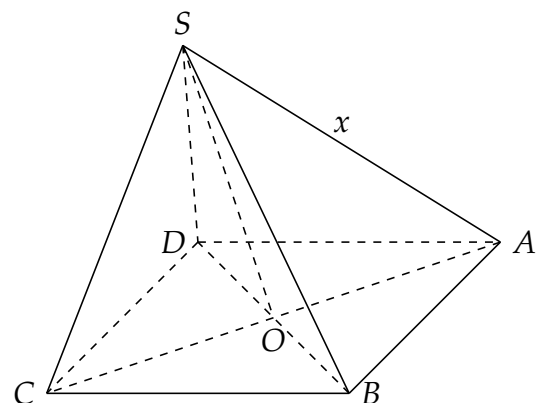
Ta có $ABCD$ là hình thoi, gọi O là giao điểm của AC và BD suy ra O là trung điểm của AC, BD .

Xét các tam giác SBD và CBD , ta có:

$$\begin{cases} SB = CB \\ SD = CD \Rightarrow \triangle SBD = \triangle CBD. \\ BD \text{ chung} \end{cases}$$

Từ đó suy ra $SO = CO = \frac{1}{2}AC$.

Vậy tam giác SAC vuông tại S hay $SA \perp SC$.





BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

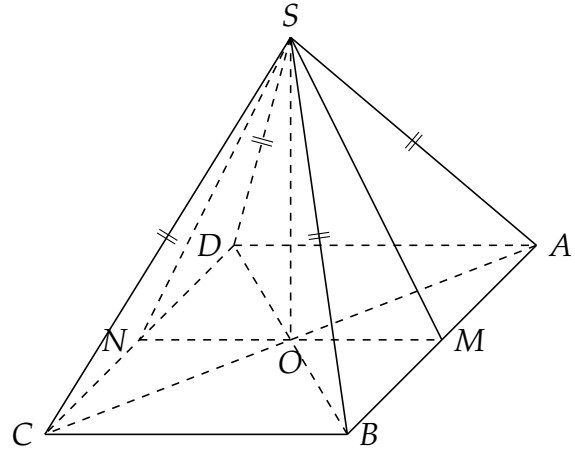
Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Do $\triangle SAB = \triangle SCD$ nên ta suy ra $SM = SN$.

Xét tam giác cân SMN có O là trung điểm MN , suy ra $SO \perp MN$.

Mặt khác $AD \parallel MN$ nên $AD \perp SO$.

Tương tự ta chứng minh được $AB \perp SO$.



BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

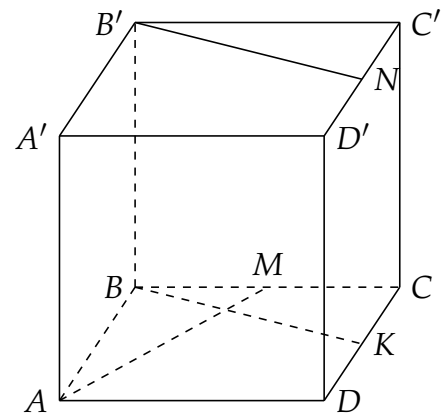
Lời giải.

Gọi K là trung điểm CD , khi đó $BK \parallel B'N$. Ta sẽ chứng minh $BK \perp AM$.

Gọi I là giao điểm của BK và AM . Do $\triangle ABM = \triangle BCK$ nên:

$$\widehat{BAI} + \widehat{ABI} = \widehat{IBC} + \widehat{ABI} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AIB} = 90^\circ.$$

Do đó $BK \perp AM$ tại I .



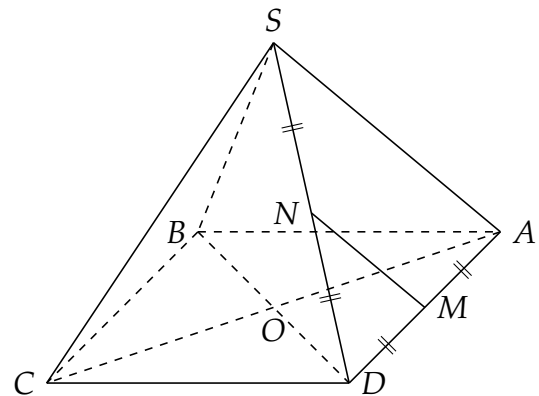
BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và có tất cả các cạnh đều bằng a . Cho M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD , chứng minh rằng $MN \perp SC$.

Lời giải.

Từ giả thiết ta có

$$\triangle SAC = \triangle DAC \Rightarrow \widehat{ASC} = \widehat{ADC} = 90^\circ \Rightarrow SA \perp SC.$$

Mặt khác $MN \parallel SA \Rightarrow MN \perp SC$.



BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, tam giác SAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh rằng $SH \perp AK$.

Lời giải.

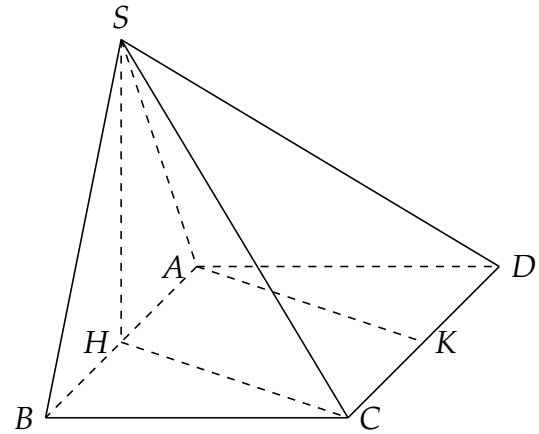
Ta có $AK \parallel HC$, do đó chỉ cần chứng minh $SH \perp HC$.

Do ΔSAB đều cạnh $2a$ nên $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $HC^2 = HB^2 + BC^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$.

Từ đó suy ra $SH^2 + HC^2 = 3a^2 + 5a^2 = 8a^2 = SC^2$.

Theo định lý Pitago ta có $SH \perp HC$.



□

BÀI 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$, tất cả các cạnh còn lại có độ dài bằng a . K là trung điểm AB và I là điểm bất kỳ trên cạnh CD , chứng minh rằng $IK \perp AB$.

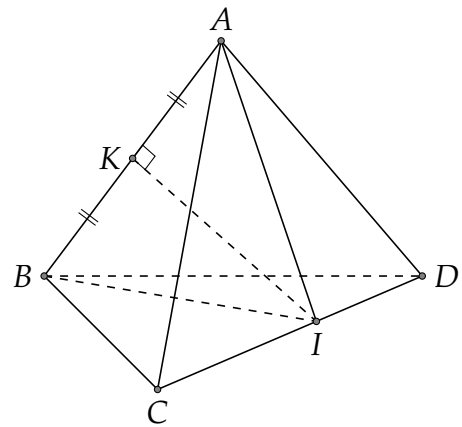
Lời giải.

Xét các tam giác ACI và BCI , ta có:

$$\begin{cases} BC = AC \\ CI \text{ chung} \\ \widehat{BCI} = \widehat{ACI} = 60^\circ \end{cases}.$$

Từ đó suy ra $\Delta ACI = \Delta BCI \Rightarrow IB = IC$.

Xét tam giác cân IAB , ta có K là trung điểm AB nên $IK \perp AB$.



□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a$, $AB = BC = a$. $SA \perp AD$ và $SA \perp AC$. Chứng minh rằng $SC \perp DC$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông cạnh a , do đó ΔCID vuông cân tại I . Từ đó ta có $CD^2 = 2a^2$. (1)

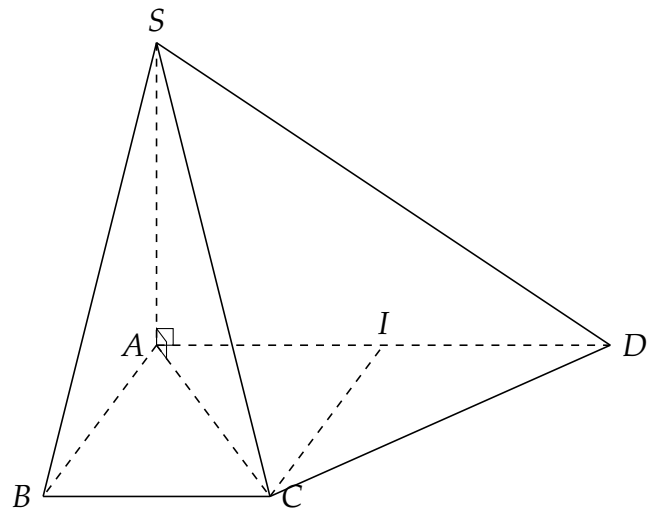
Áp dụng định lý Pitago cho các tam giác SAC, SAD ta có:

$$SD^2 = SA^2 + AD^2 = SA^2 + 4a^2; \quad (2)$$

$$SC^2 = SA^2 + AC^2 = SA^2 + 2a^2. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra

$$SD^2 = SC^2 + CD^2 \Rightarrow SC \perp CD.$$



□

📁 DẠNG 2.4. Hai đường thẳng song song cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba

Để chứng minh đường thẳng $a \perp b$, ta chứng minh $a \parallel a'$, ở đó $a' \perp b$.

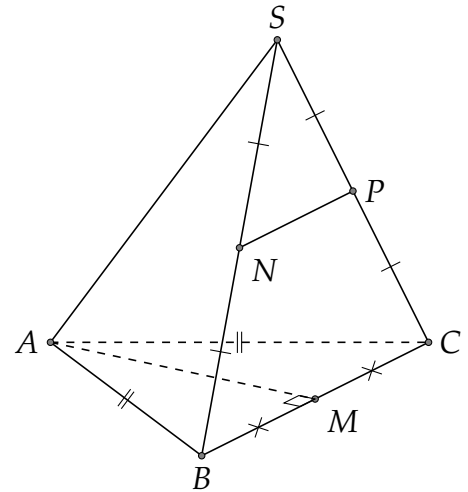
VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC . Chứng minh rằng AM vuông góc với NP .

 Lời giải

Do N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC nên NP là đường trung bình của tam giác SBC , từ đó suy ra $NP \parallel BC$. (1)

Mặt khác, do tam giác ABC cân tại A , suy ra trung tuyến $AM \perp BC$. (2)

Từ (1)(2) suy ra $AM \perp NP$.



□

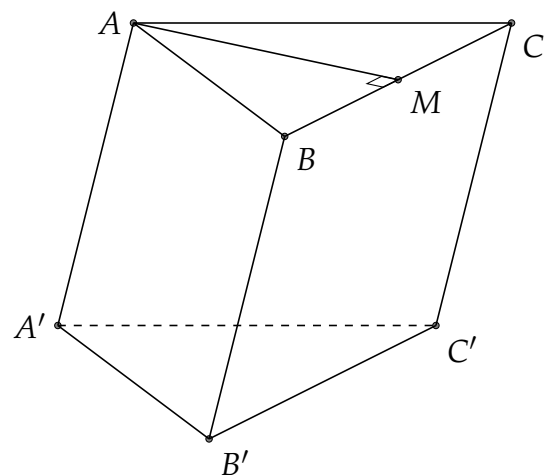
VÍ DỤ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

 Lời giải

Do tứ giác $BB'C'C$ là hình bình hành nên $BC \parallel B'C'$. (1)

Mặt khác, do tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$. (2)

Từ (1)(2) suy ra $AM \perp B'C'$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ ($0 < x < a$). Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ .

 Lời giải

Do tứ giác $BB'D'D$ là hình chữ nhật, suy ra $BD \parallel B'D'$.

(1)

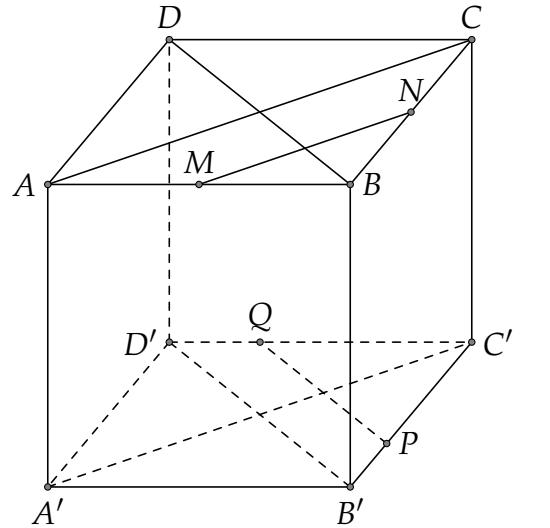
Do $ABCD$ là hình vuông, suy ra $BD \perp AC$. (2)

Từ (1)(2) suy ra $B'D' \perp AC$. (3)

Theo bài ra ta có MN là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra $MN \parallel AC$. (4)

Mặt khác, ta có $\frac{C'P}{C'B} = \frac{C'Q}{C'D'} = \frac{x}{a}$, suy ra $PQ \parallel B'D'$. (5)

Từ (3)(4)(5) ta có $MN \perp PQ$.



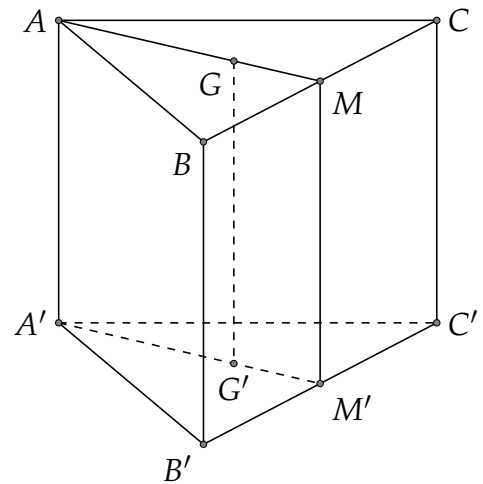
□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm hai đáy. Chứng minh rằng GG' vuông góc với BC .

Lời giải.

Dễ dàng chứng minh được $GG' \parallel MM'$ và $MM' \perp BC$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.



□

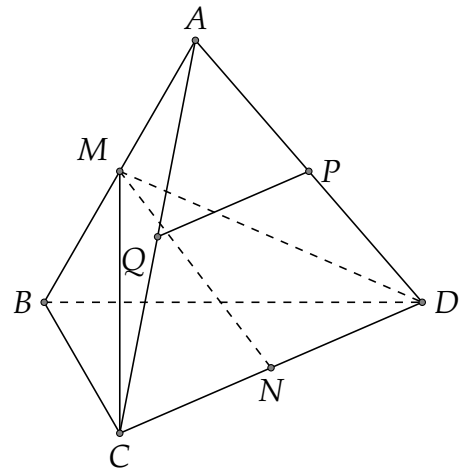
BÀI 2. Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AD và AC . Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ .

Lời giải.

Theo giả thiết ta có $\triangle ABC = \triangle ABD$, từ đó ta có $MC = MD$, suy ra $\triangle MCD$ cân tại M , suy ra $MN \perp CD$. (1)

Cũng theo giả thiết ta có PQ là đường trung bình của tam giác ACD , suy ra $PQ \parallel CD$. (2)

Từ (1)(2) suy ra điều phải chứng minh.



□

BÀI 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = 2a$ ($a > 0$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AD . Biết rằng $MN = a\sqrt{2}$. Chứng minh rằng AB vuông góc với CD .

Lời giải.

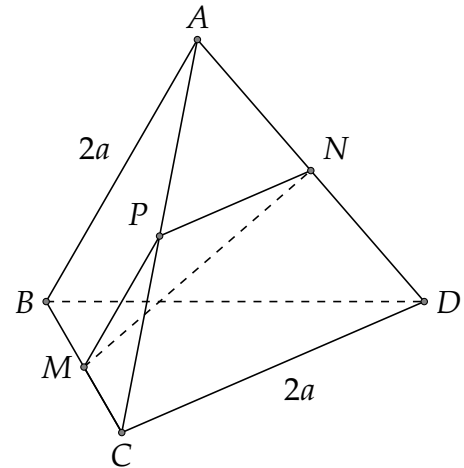
Lấy P là trung điểm của AC .

Theo tính chất đường trung bình ta có $PN \parallel = \frac{1}{2}CD = a$ và

$$PM \parallel = \frac{1}{2}AB = a. \quad (*)$$

Từ đó ta có $MP^2 + NP^2 = 2a^2 = MN^2$, vậy tam giác MNP vuông tại P suy ra $MP \perp NP$. (**)

Từ $(*)(**)$ ta có $AB \perp CD$.



□

BÀI 4. Cho tứ diện $ABCD$, có $AB = CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD , M thuộc cạnh AC sao cho $AC = 3AM$, các điểm N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC . Chứng minh rằng MG vuông góc với NP .

Lời giải.

Lấy E, F lần lượt là trung điểm của AC, BD .

Ta có $\frac{AM}{AE} = \frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$, suy ra $MG \parallel EF$. (1)

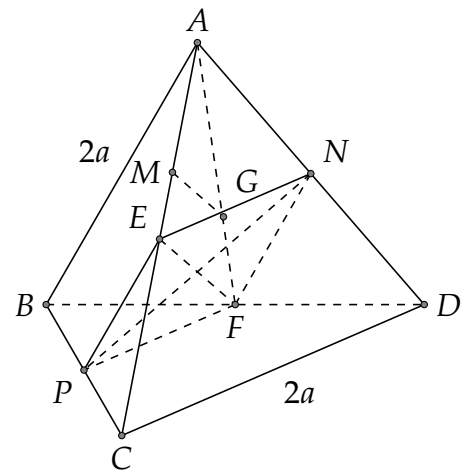
Mặt khác theo tính chất đường trung bình ta có

$$EN \parallel = FP = \frac{1}{2}CD = a$$

$$EP \parallel = FN = \frac{1}{2}AB = a.$$

Từ đó suy ra tứ giác $ENFP$ là hình thoi, suy ra $EF \perp NP$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MG \perp NP$.



□

BÀI 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

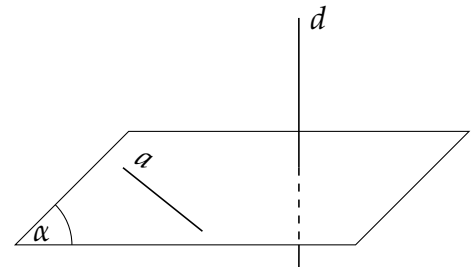
A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1.

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) .

Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

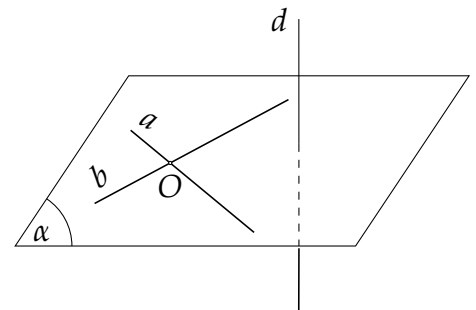


2 ĐIỀU KIỆN ĐỂ ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Định lý 1. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

 Tóm tắt định lý.

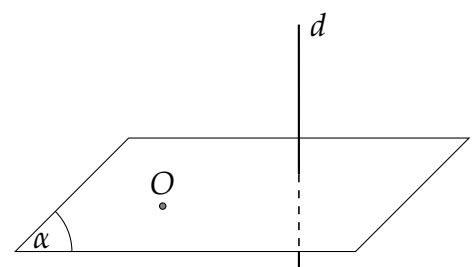
$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = O \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



Hệ quả 1. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

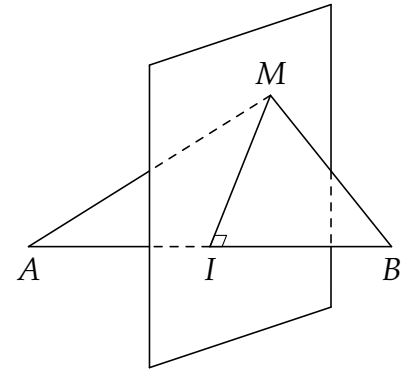
3 TÍNH CHẤT

Tính chất 1. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

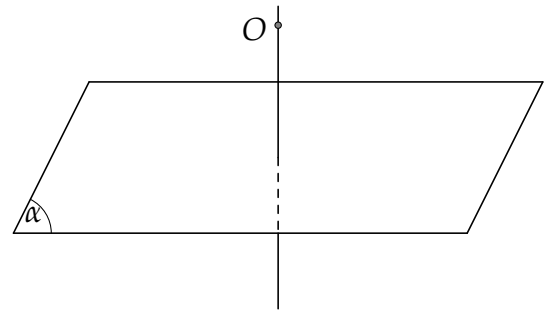


 Chú ý

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .



Tính chất 2. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



4 LIÊN HỆ GIỮA QUAN HỆ SONG SONG VÀ QUAN HỆ VUÔNG GÓC CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Tính chất 3.

- ① Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

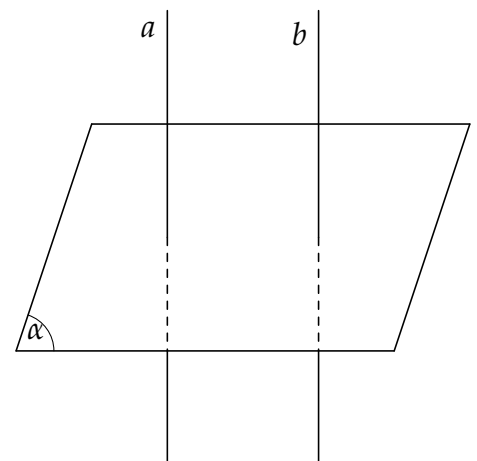
⚠ Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$$

- ② Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

⚠ Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$



Tính chất 4.

- ① Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

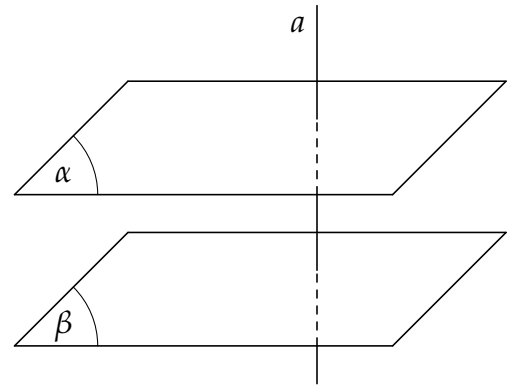
$\triangle$ Tóm tắt:

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$

- ② Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

$\triangle$ Tóm tắt:

$$\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

**Tính chất 5.**

- ① Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a .

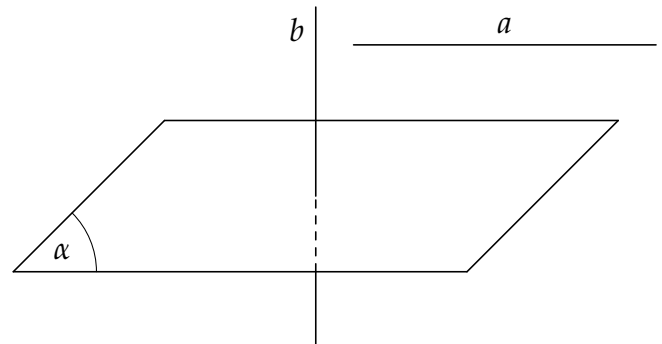
$\triangle$ Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$$

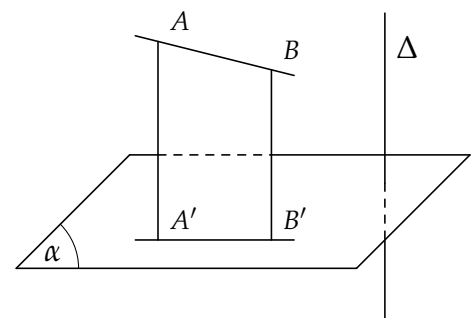
- ② Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

$\triangle$ Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$$

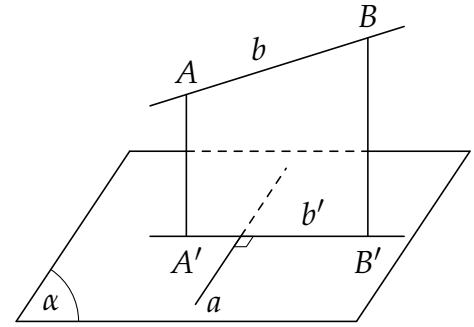
**5****PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC VÀ ĐỊNH LÝ BA ĐƯỜNG VUÔNG GÓC****1. Phép chiếu vuông góc**

Cho đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) . Phép chiếu song song theo phương của Δ lên mặt phẳng (α) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (α)* .



2. Định lý ba đường vuông góc

Định lý 2. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .



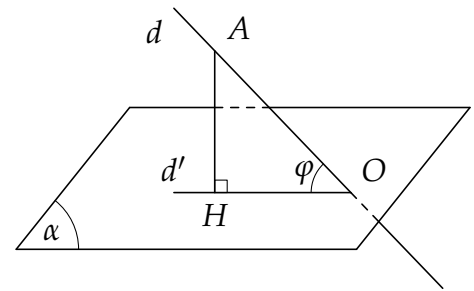
! Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \subset (\alpha) \\ b \not\subset (\alpha) \\ b \not\perp (\alpha) \\ b' \text{ là hình chiếu vuông góc của } b \text{ trên } (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp b \Leftrightarrow a \perp b'.$$

3. Góc Giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 2. Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) . Trường hợp đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng 90° .

Trường hợp đường thẳng d không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa đường thẳng d và hình chiếu d' của nó trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) .



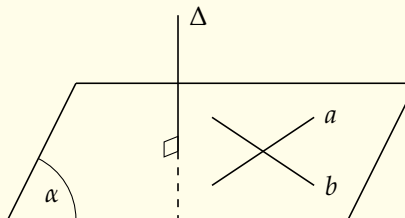
! Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.

B CÁC DẠNG TOÁN

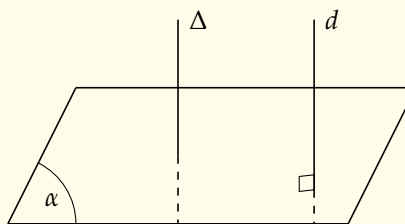
📁 DẠNG 3.1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Để chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (α) , ta thực hiện theo một trong hai cách sau:

① Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc (α) .

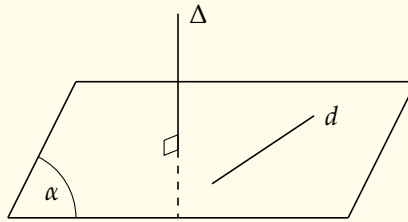


② Chứng minh Δ song song với đường thẳng (d) , trong đó (d) vuông góc với (α) .

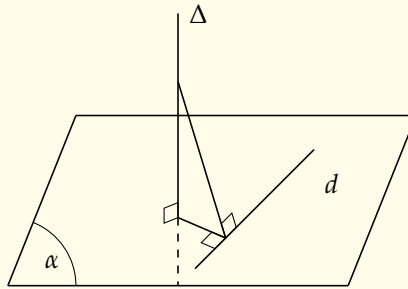


Để chứng minh đường thẳng (Δ) vuông góc với đường thẳng (d) , ta thực hiện theo một trong các cách sau:

- ① Chứng minh (Δ) vuông góc với mặt phẳng (α) chứa (d) .



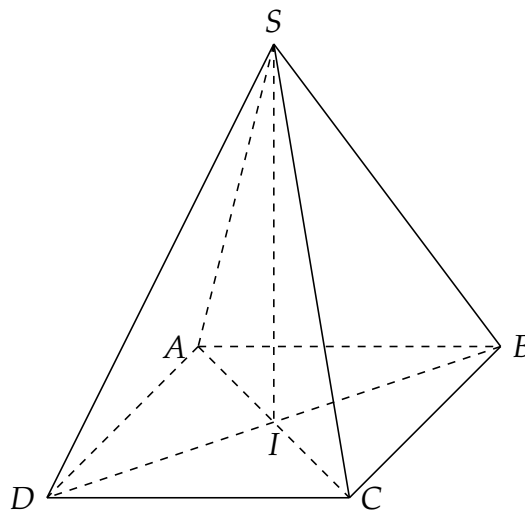
- ② Sử dụng định lý ba đường vuông góc.



- ③ Nếu hai đường thẳng cắt nhau thì ta có thể sử dụng các phương pháp chứng minh hai đường thẳng vuông góc trong mặt phẳng.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh rằng $SI \perp (ABCD)$.

Lời giải



Để chứng minh SI vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ ta cần chứng minh SI vuông góc với hai cạnh cắt nhau trong mặt phẳng đó.

Theo giả thiết, $\triangle SAC$ và $\triangle SBD$ là tam giác cân tại S . Hơn nữa $I = AC \cap BD$ là trung điểm của

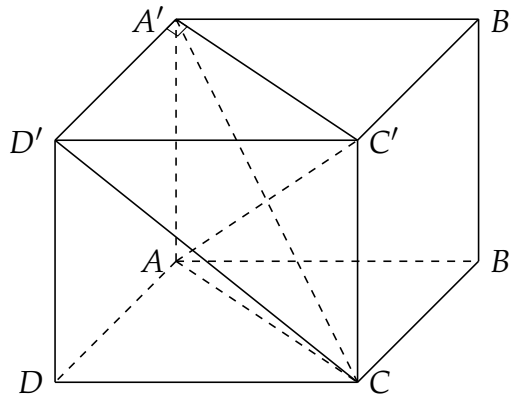
AC và BD (do $ABCD$ là hình vuông). Từ đó ta có:

$$\begin{cases} SI \perp AC \\ SI \perp BD \\ AC \cap BD = I \end{cases} \Rightarrow SI \perp (ABCD)$$

Vậy $SI \perp (ABCD)$. □

VÍ DỤ 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A , $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} AA'C'C \text{ là hình chữ nhật} \\ AA' = A'C' \end{cases}$

$\Rightarrow AA'C'C$ là hình vuông $\Rightarrow AC' \perp A'C$ (1)

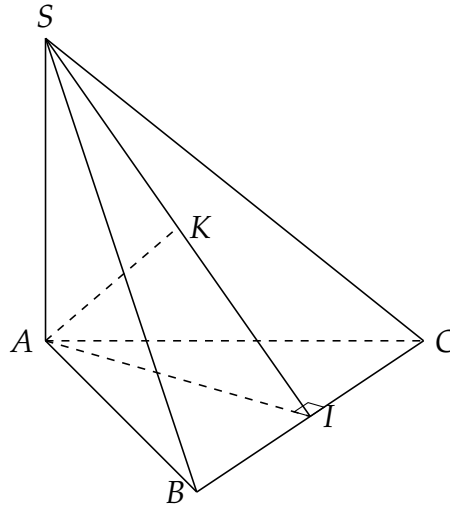
Lại có $AA' \perp (A'B'C'D') \Rightarrow AA' \perp A'D'$. Lại có $\triangle D'A'C'$ vuông tại A' nên $A'D' \perp A'C'$. Từ đó ta được

$A'D' \perp (AA'C'C) \Rightarrow A'D' \perp AC'$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $AC' \perp (A'D'C)$. □

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI . Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

Lời giải



Theo giả thiết $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm BC suy ra $AI \perp BC$ (1) và $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AK$. (3)

Tam giác SAI có $SA = AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên $\triangle SAI$ là tam giác cân tại A , hơn nữa K là trung điểm SI suy ra $AK \perp SI$. (4)

Từ (3) và (4) ta có $AK \perp (SBC)$. □

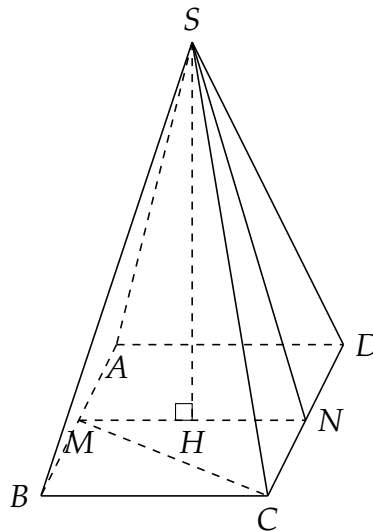
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

① Chứng minh $SM \perp (SCD)$, $SD \perp MC$.

② Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên MN . Chứng minh $SH \perp BN$. Tính SH .

Lời giải.



① $\triangle SAB$ đều cạnh a có M là trung điểm của AB nên $SM \perp AB$ và $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\triangle SCD$ vuông cân tại S có $CD = a$, N là trung điểm CD suy ra $SN = \frac{a}{2}$.

Xét $\triangle SMN$ có $SM^2 + SN^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2 = MN^2$.

Suy ra $SM \perp SN$. Mà $SM \perp CD$ (vì $CD \parallel AB$). Do đó $SM \perp (SCD)$.
 Có $SD \perp SM$ và $SD \perp SC$ nên $SD \perp MC$.

- ② Có $CD \perp MN, CD \perp SN$ suy ra $CD \perp (SMN) \Rightarrow CD \perp SH$.
 Mà $SH \perp MN$ nên $SH \perp (ABCD)$. Do đó $SH \perp MC$.

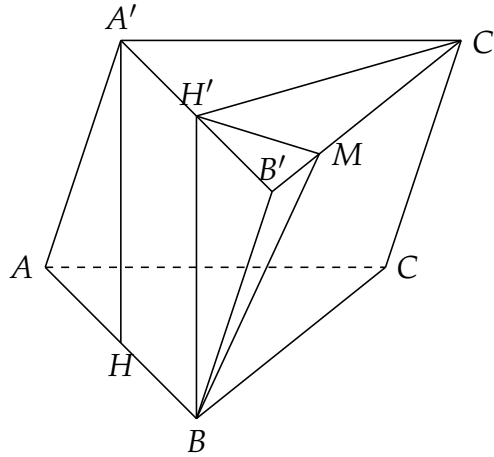
$$SH = \frac{SM \cdot SN}{MN} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

□

BÀI 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , cạnh bên bằng $2a$. Biết hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm H của AB . Gọi H' là trung điểm của $A'B'$, M là điểm thuộc cạnh $B'C'$ sao cho $B'C' = 4B'M$.

- ① Chứng minh $B'C' \perp (BMH')$.
 ② Tứ giác $CHH'C'$ là hình gì? Tại sao? Tính CH' .

Lời giải.



- ① $\Delta A'B'C'$ đều nên $H'M$ song song với đường cao kẻ từ A' , do đó $H'M \perp B'C'$.
 Lại có $BH' \parallel A'H$ mà $A'H \perp (ABC)$ nên $BH' \perp BC$. Suy ra $BH' \perp B'C'$.
 Do đó $B'C' \perp (BMH')$.

- ② Có $CH \perp AB; CH \perp A'H$ nên $CH \perp (ABB'A')$, suy ra $CH \perp HH'$.
 Hình bình hành $CHH'C'$ có $\widehat{H'HC} = 90^\circ$ nên $CHH'C'$ là hình chữ nhật.

$$CH' = \sqrt{HH'^2 + CH^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{19}}{2}.$$

□

BÀI 3. Trong mặt phẳng (P) , cho tam giác MAB vuông tại M . Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A , ta lấy hai điểm C, D khác phía so với A . Gọi C' là hình chiếu của C trên MD , H là giao điểm của AM và CC' .

- ① Chứng minh $CC' \perp (MBD)$.
 ② Gọi K là hình chiếu của H trên AB . Chứng minh K là trực tâm tam giác BCD .

Lời giải.

$$SA = \sqrt{AC^2 + SC^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

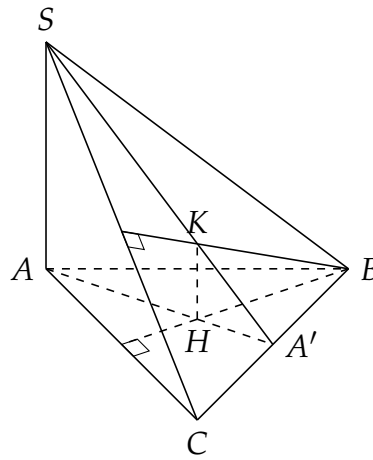
Từ (*) ta có $IH = \frac{a}{2} = \frac{BD}{2}$.

Tam giác BHD có trung tuyến IH ứng với cạnh BD bằng $\frac{BD}{2}$ nên đó là tam giác vuông tại H .

□

BÀI 5. Tứ diện $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng $HK \perp (SBC)$.

Lời giải.



Vì K là trực tâm của tam giác SBC nên $BK \perp SC$. (1)

Có H là trực tâm của tam giác ABC nên $BH \perp AC$ và $SA \perp (ABC)$ nên $BH \perp SA$. Do đó $BH \perp (SAC)$ nên $BH \perp SC$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra $SC \perp (BHK)$, nên $SC \perp HK$. (*)

Gọi A' là giao điểm của AH và BC .

Có $AA' \perp BC$ và $BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAA')$, suy ra $BC \perp SA'$.

Do đó có SA' là đường cao của tam giác SBC nên SA' đi qua K .

Vậy $BC \perp HK$ (**).

Từ (*) và (**) suy ra $HK \perp (SBC)$.

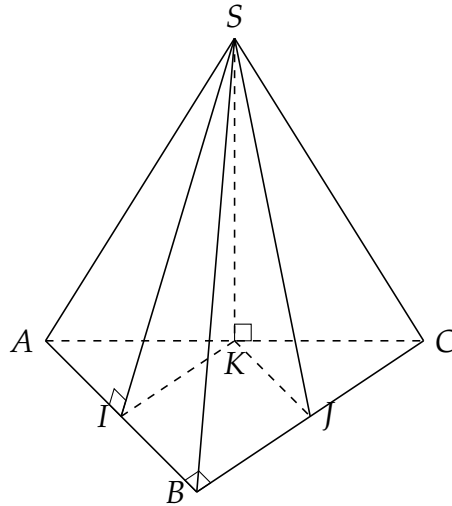
□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $\triangle SAB, \triangle SAC$ cân tại S . I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Chứng minh rằng:

① $SK \perp (ABC)$.

② $BC \perp (SKJ)$.

Lời giải.

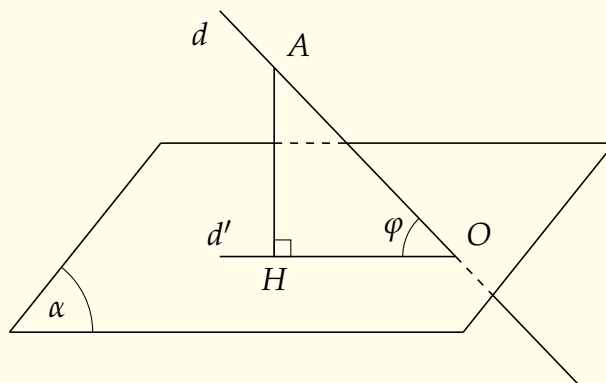


- ① Ta có $\triangle SAB$ cân tại S , I là trung điểm AB nên $SI \perp AB$. (1)
 Lại có IK là đường trung bình của tam giác ABC suy ra $IK \parallel BC \Rightarrow IK \perp AB$ (2) (do $\triangle ABC$ vuông tại B).
 Từ (1) và (2) ta có $AB \perp (SIK) \Rightarrow AB \perp SK$. (3)
 Tam giác SAC cân tại S , K là trung điểm AC nên $SK \perp AC$. (4)
 Từ (3) và (4) ta có $SK \perp (ABC)$.
- ② Theo (a) ta có $SK \perp (ABC) \Rightarrow SK \perp BC$.
 Lại có KJ là đường trung bình của $\triangle ABC$ nên $KJ \parallel AB \Rightarrow KJ \perp BC$.
 Vậy ta được $BC \perp (SKJ)$.

□

📁 DẠNG 3.2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
 Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau

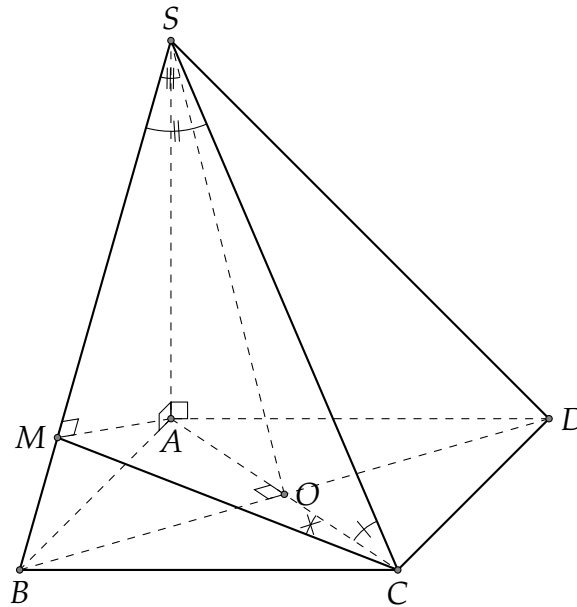
- ① Xác định giao điểm O của d và (P) .
 ② Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.

⚠ $0^\circ \leq (d, (P)) \leq 90^\circ$.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

- ① SC và $(ABCD)$.
- ② SC và (SAB) .
- ③ SB và (SAC) .
- ④ AC và (SBC) .

 Lời giải



- ① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là $\widehat{SCA}$.

Trong tam giác SCA , ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.

- ② Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

Trong tam giác SCB , ta có $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC, (SAB)) = \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}$.

- ③ Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC) .

Do đó $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

Trong tam giác SBO , ta có $\sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB, (SAC)) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{14}}$.

- ④ Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M . Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC) .

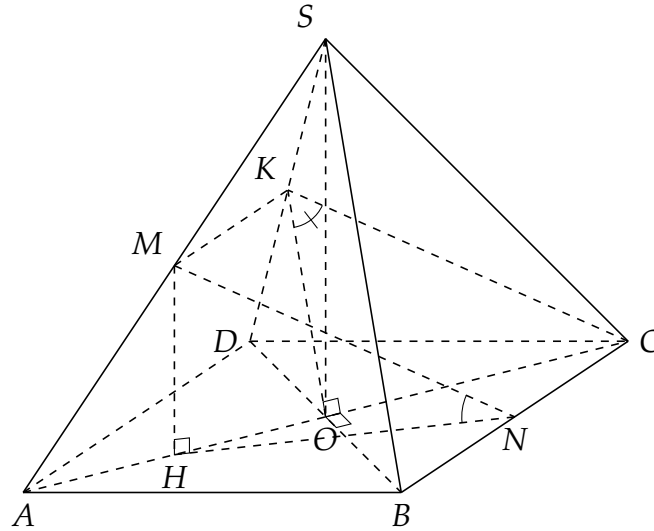
Suy ra $(AC, (SBC)) = (AC, MC) = \widehat{ACM}$.

Trong tam giác SAB , ta có $AM = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM , ta có $\sin \widehat{ACM} = \frac{MA}{AC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC, (SBC)) = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.



VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính góc giữa MN và (SBD) .

Lời giải



Gọi H là trung điểm AO . Ta có $MH \parallel SO$ nên $MH \perp (ABCD)$, suy ra HN là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ABCD)$. Do đó $(MN, (ABCD)) = (MN, KN) = \widehat{MNH} = 60^\circ$.

Trong tam giác HCN , ta có $HN^2 = HC^2 + CN^2 - 2HC \cdot CN \cdot \cos \widehat{HCN}$, suy ra $HN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Mà trong tam giác MNH , ta có $\sqrt{3} = \tan \widehat{MNH} = \frac{MH}{HN}$ nên $MH = \frac{a\sqrt{30}}{4}$, suy ra $SO = 2MH = \frac{a\sqrt{30}}{2}$.

Gọi K là trung điểm SD .

Ta có $MKCN$ là hình bình hành nên MN song song KC . Do đó $(MN, (SBD)) = (KC, (SBD))$.

Mà $CO \perp (SBD)$ tại O (do $CO \perp DO$ và $CO \perp SO$) nên KO là hình chiếu vuông góc của KC lên (SBD) . Suy ra $(KC, (SBD)) = (KC, KO) = \widehat{CKO}$.

Ta có $OK = \frac{1}{2}SD = \frac{1}{2}\sqrt{OD^2 + OS^2} = a\sqrt{2}$.

Mặt khác, trong tam giác COK , ta có $\tan \widehat{CKO} = \frac{OC}{OK} = \frac{1}{2}$, suy ra $(KC, (SBD)) = \arctan \widehat{CKO} = \arctan \frac{1}{2} \approx 26^\circ 33'$. □

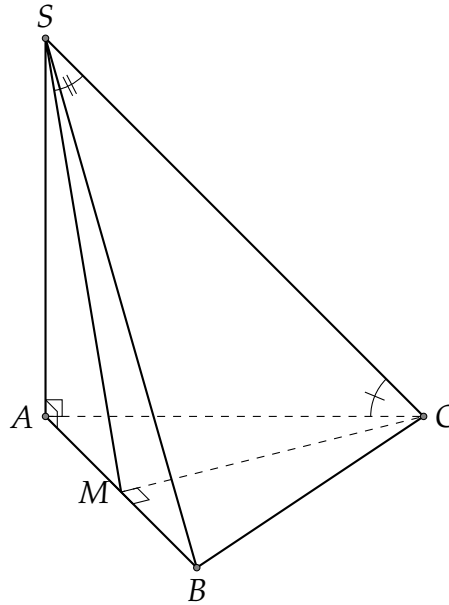
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

① SC và (ABC) .

② SC và (SAB) .

Lời giải.



- ① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) nên $(SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.
Ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = 2$ nên $(SC, (ABC)) = \arctan 2 \approx 63^\circ$.

- ② Gọi M là trung điểm AB . Vì $\begin{cases} CM \perp AB \\ CM \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$ nên $CM \perp (SAB)$ tại M .
Suy ra SM là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .
Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SM) = \widehat{CSM}$.

$$\text{Trong tam giác } SMC, \text{ ta có } \tan \widehat{CSM} = \frac{MC}{SM} = \frac{MC}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{4a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{\sqrt{51}}{17}.$$

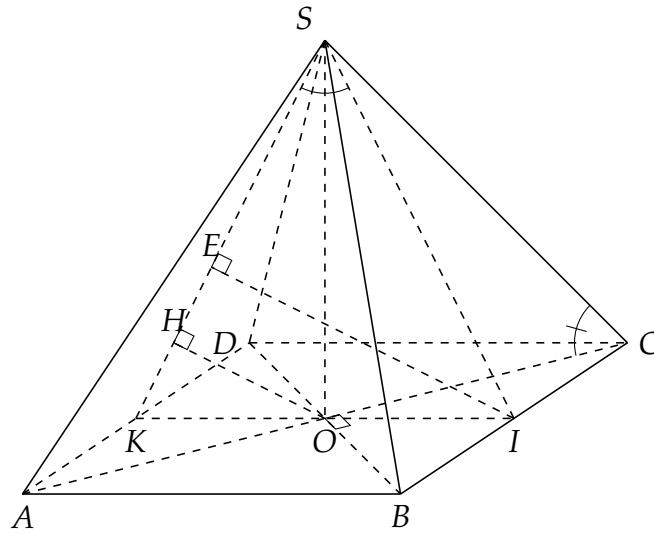
$$\text{Vậy } (SC, (SAB)) = \arctan \frac{\sqrt{51}}{17} \approx 23^\circ.$$

□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{6}$.

- ① Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.
- ② Tính góc giữa SO và (SAD) .
- ③ Gọi I là trung điểm BC . Tính góc giữa SI và (SAD) .

Lời giải.

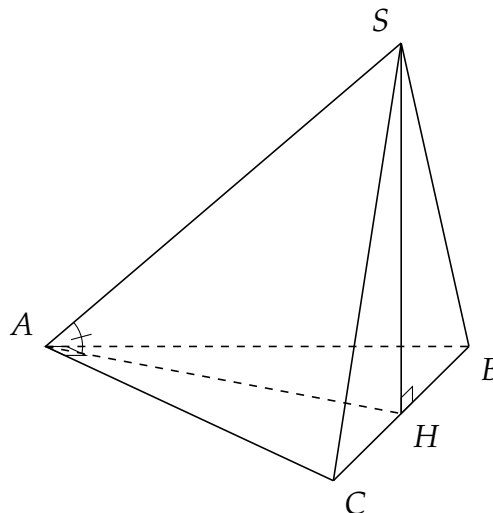


- ① Vì OC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, OC) = \widehat{SCO}$.
 Trong tam giác SOC , ta có $\tan \widehat{SCO} = \frac{SO}{OC} = 2\sqrt{3}$, do đó $(SC, (ABCD)) = \arctan 2\sqrt{3} \approx 74^\circ$.
- ② Gọi K là trung điểm AD và H là hình chiếu vuông góc của O lên SK . Ta có $OH \perp SK$ và $OH \perp AD$ (vì $AD \perp (SKO)$) nên $OH \perp (SAD)$, do đó H là hình chiếu vuông góc của O lên (SAD) , suy ra SH là hình chiếu vuông góc của SO lên (SAD) .
 Do đó $(SO, (SAD)) = (SO, SH) = \widehat{HSO}$.
 Trong tam giác SOK , ta có $\tan \widehat{HSO} = \tan \widehat{KSO} = \frac{OK}{OS} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $(SO, (SAD)) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 12^\circ$.
- ③ Trong tam giác SKI , kẻ IE vuông góc SK tại E . Lúc đó $IE \perp (SAD)$ (do $IE \parallel OH$). Suy ra SE là hình chiếu vuông góc của SI lên (SAD) .
 Do đó $(SI, (SAD)) = (SI, SE) = \widehat{ISE} = 2\widehat{HSO} \approx 24^\circ$.

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa SA và (ABC) .

Lời giải.



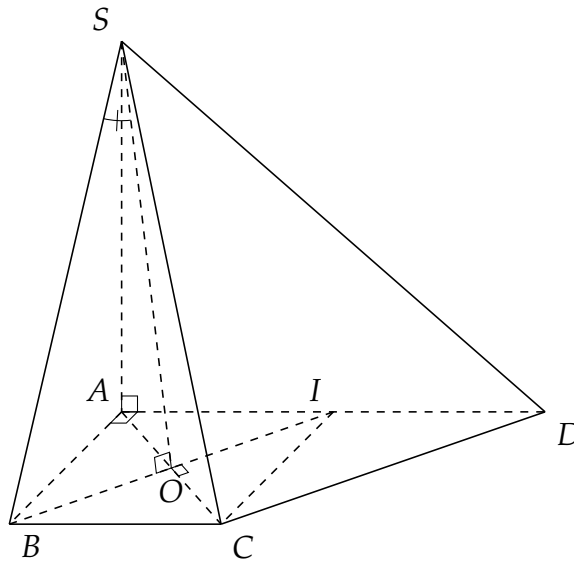
Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) . Lúc đó ba tam giác SAH, SBH và SCH bằng nhau (vì chúng là 3 tam giác vuông có chung cạnh SH và có ba cạnh SA, SB, SC bằng nhau). Suy ra $HA = HB = HC$ nên H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông ABC , suy ra H là trung điểm BC .

Do đó HA là hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) , suy ra $(SA, (ABC)) = (SA, AH) = \widehat{SAH}$.

Ta có $\cos SAH = \frac{AH}{SA} = \frac{\frac{BC}{2}}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, suy ra $(SA, (ABC)) = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 55^\circ$. $\square$

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.



Gọi I là trung điểm AD . Lúc đó $ABCI$ là hình vuông, suy ra $BI \perp AC$ (tại O).

Mà $SA \perp (ABCD)$ nên $BI \perp SA$. Do đó $BI \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC) , suy ra $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

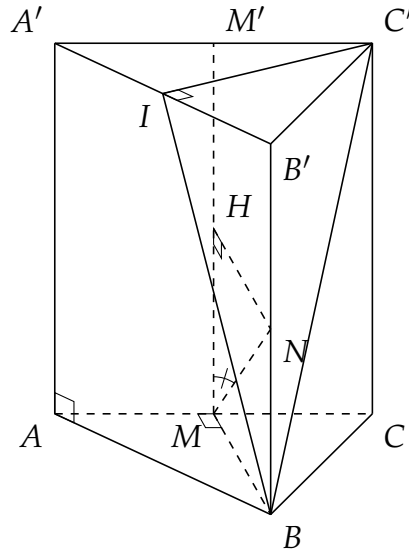
Trong tam giác SBO , ta có $\sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{BI}{2}}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{6}$, suy ra $(SB, (SAC)) = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{6} \approx 24^\circ$. $\square$

BÀI 5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC) . Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc 30° .

① Tính AA' .

② Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB' . Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

Lời giải.



- ① Gọi I là trung điểm $A'B'$. Ta có $C'I \perp A'B'$ và $C'I \perp BB'$ nên $C'I \perp (ABB'A')$ tại I . Do đó IB là hình chiếu vuông góc của $C'B$ lên $(ABB'A')$. Suy ra $(BC', (ABB'A')) = \widehat{C'BI} = 30^\circ$.
 Trong tam giác $C'IB$, ta có $\tan \widehat{C'BI} = \frac{IC'}{IB}$, suy ra $IB = \frac{3a}{2}$. Khi đó $AA' = BB' = \sqrt{IB^2 - IB'^2} = a\sqrt{2}$.
- ② Gọi M' là trung điểm $A'C'$ và H là trung điểm MM' .
 Ta có $BM \perp (ACC'A')$ (vì $BM \perp AC$ và $BM \perp AA'$) mà $HN \parallel BM$ nên $HN \perp (ACC'A')$ tại H . Suy ra MH là hình chiếu vuông góc của MN lên $(ACC'A')$.
 Do đó $(MN, (ACC'A')) = (MN, MH) = \widehat{NMH}$. Mà trong tam giác NMH , ta có $\tan \widehat{NMH} = \frac{HN}{MH} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
 Vậy $(MN, (ACC'A')) = \arctan \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 51^\circ$.

□

📁 DẠNG 3.3. Xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng cho trước

Để xác định thiết diện của một khối đa diện cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua điểm M và vuông góc với Δ cho trước, ta thực hiện như sau:

- Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với Δ trong đó có ít nhất một đường thẳng đi qua M . Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (α) . Sau đó ta cần tìm giao tuyến của (α) với các mặt của khối đa diện.
- Nếu có sẵn hai đường thẳng chéo nhau hoặc cắt nhau a, b vuông góc với Δ thì ta dựng (α) đi qua M và song song với a, b .

VÍ DỤ 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân đỉnh C , $CA = 2a$ và mặt bên $ABB'A'$ là hình vuông. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C và vuông góc với AB' . Xác định thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (P) và tính diện tích thiết diện đó.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow CH \perp AB \Rightarrow CH \perp AB'$.

Dựng $HK \perp AB'$, với K thuộc cạnh AA' .

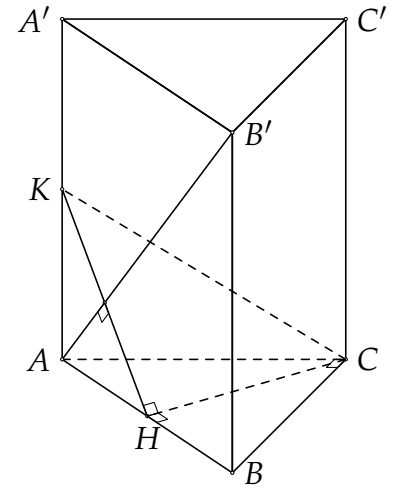
Suy ra thiết diện là tam giác CHK và tam giác CHK vuông tại H .

$$S_{CHK} = \frac{1}{2}CH \cdot HK.$$

$$\text{Trong } \triangle ABC, CH = \frac{AB}{2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \triangle AHK \text{ vuông cân tại } A \text{ và } HK = \frac{A'B \cdot \sqrt{2}}{2} = 2a.$$

$$\text{Vậy } S_{CHK} = \frac{1}{2}CH \cdot HK = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 2a = a^2\sqrt{2}.$$



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với cạnh AC . Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

✍️ Lời giải

Gọi E là trung điểm $AC \Rightarrow BE \perp AC$.

Trong (ABC) , dựng $MN \perp AC$, với N thuộc cạnh $BC \Rightarrow MN \parallel EB$.

Trong (SAC) , dựng $MP \perp AC$, với P thuộc cạnh $SC \Rightarrow MP \parallel SA$.

Suy ra thiết diện là tam giác MPN và tam giác MPN vuông tại M .

$$S_{MPN} = \frac{1}{2}MN \cdot PM.$$

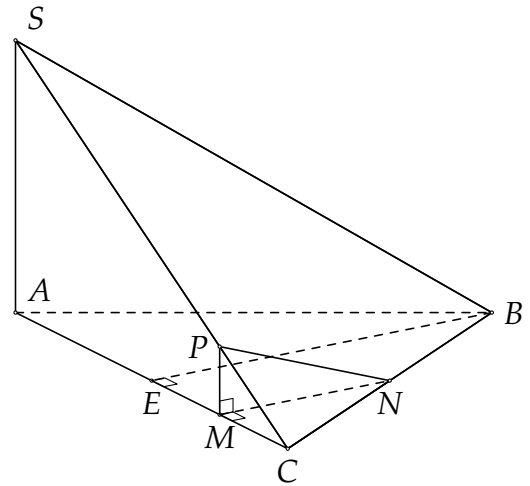
$$\text{Ta có } \triangle SAC \sim \triangle PMC \Rightarrow \frac{PM}{SA} = \frac{CM}{CA}$$

$$\Rightarrow PM = \frac{SA \cdot CM}{CA} = a \cdot \frac{1}{4} = \frac{a}{4}.$$

Ta có MN là đường trung bình của tam giác $\triangle BEC$

$$\Rightarrow MN = \frac{1}{2}EB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{MPN} = \frac{1}{2}MN \cdot PM = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}.$$

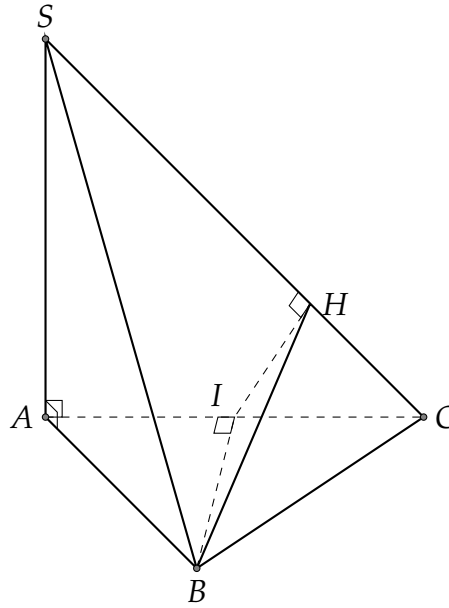


□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AH là đường cao của tam giác SAB . Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với cạnh SB . Xác định thiết diện của hình chóp đã cho khi cắt bởi mặt phẳng (α) và tính diện tích thiết diện đó.

Lời giải.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm AC , ta có $BI \perp AC$. Mà $BI \perp SA$ nên $BI \perp (SAC)$, suy ra $BI \perp SC$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên SC . Lúc đó $SC \perp (BIH)$. Do đó tam giác BIH là thiết diện cần tìm.

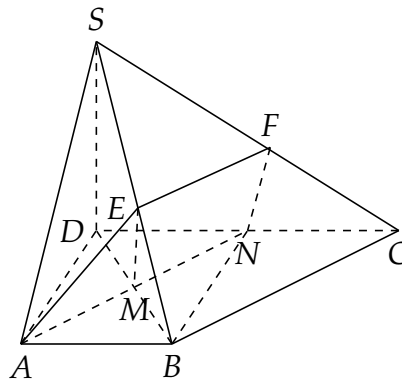
Vì $BI \perp (SAC)$ nên $BI \perp IH$, suy ra tam giác IBH vuông tại I .

Ta có $\triangle CHI \sim \triangle CAS$ nên $\frac{IH}{SA} = \frac{CI}{CS}$, suy ra $IH = \frac{CI \cdot SA}{CS} = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Do đó $S_{\triangle BIH} = \frac{1}{2}IH \cdot IB = \frac{a^2\sqrt{15}}{20}$. □

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SD \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, D và $AD = AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$. M là trung điểm của BD . Tìm thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua M và vuông góc SB với hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải.

$\triangle ABD$ vuông cân tại A nên $BD = a\sqrt{2}$.

$\triangle BDC$ có $BD = BC = a\sqrt{2}$ và $\widehat{BDN} = 45^\circ$ nên $\triangle BDC$ vuông cân tại B .

Gọi N là trung điểm của CD . Vì $\triangle BDC$ vuông cân tại B nên $DN = BN = NC = \frac{BC}{\sqrt{2}} = a$.

Do đó $ABND$ là hình vuông. Suy ra $AN \perp BD$.

Ta có $SD \perp (ABCD)$ và $AN \perp BD$ nên $AN \perp SB$ (định lý ba đường vuông góc).

Trong mặt phẳng (SBD) , ta hạ $ME \perp SB$ tại E . Khi đó mặt phẳng (AEN) vuông góc với SB chính là mặt phẳng (α) .

Ta có $AN \parallel BC$ (cùng vuông góc DB) nên $(AEN) \parallel BC$. Do đó (AEN) cắt (SBC) theo một giao tuyến song song với BC .

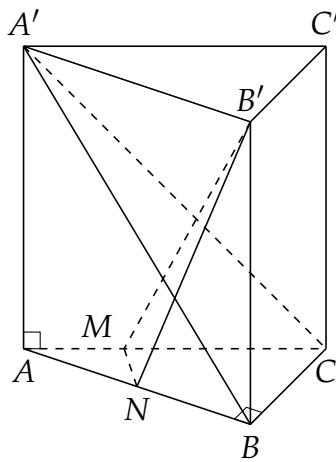
Trong mặt phẳng (SBC) , kẻ đường thẳng qua E song song với BC và cắt SC tại F .

Thiết diện của hình chóp $(S.ABCD)$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình tứ giác $AEFN$.

□

BÀI 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = BC = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $\triangle ABC$ vuông tại B . Điểm M nằm trên cạnh AC sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Chứng minh rằng $B'M \perp A'C$.

Lời giải.



Gọi N là trung điểm AB .

$\triangle ABC$ vuông tại B nên $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có $\frac{BN}{BB'} = \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{BB'}{A'B'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ta lại có $\widehat{NBB'} = \widehat{BB'A'}$ (cùng là góc vuông) nên $\triangle NBB' \sim \triangle BB'A'$.

Suy ra $\widehat{B'NB} = \widehat{A'BB'} \Rightarrow \widehat{B'NB} + \widehat{A'BB'} = \widehat{A'BB'} + \widehat{A'BB'} = 90^\circ$. Vì vậy $B'N \perp A'B$ (1).

Ta có $\begin{cases} BB' \perp BC \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow CB \perp (ABB'A')$ (2).

Từ (1), (2) theo định lý ba đường vuông góc ta có $B'N \perp A'C$ (3).

Ta có $\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{3AB} = \frac{a\sqrt{3}}{3a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{AN}{AC} = \frac{AB}{2AC} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$. Suy ra $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

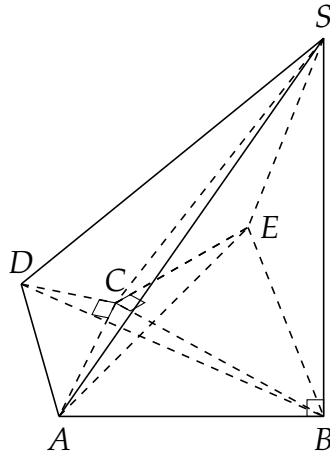
Vì vậy $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ hay $MN \perp AC$.

Mặt khác $(ACC'A) \perp (ABC)$ nên suy ra $MN \perp (ACC'A) \Rightarrow MN \perp A'C$ (4).

Từ (3), (4) ta suy ra $A'C \perp (B'MN) \Rightarrow A'C \perp B'M$. □

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SB \perp (ABC)$. Trên mặt phẳng (ABC) , dựng về phía ngoài $\triangle ABC$ các điểm D, E sao cho $\triangle ACD$ và $\triangle ECB$ vuông cân tại C . Chứng minh rằng $SA \perp BD$.

Lời giải.

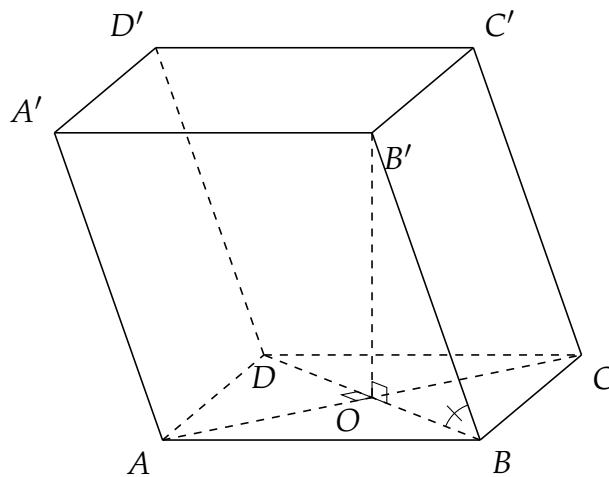


Xét phép quay $Q_C^{\frac{\pi}{2}}$ biến D thành A , biến B thành E . Do đó phép quay $Q_C^{\frac{\pi}{2}}$ biến DB thành AE và vì vậy ta có $BD \perp AE$.

Ta có $SB \perp (ABC)$ và $BD \perp AE$ nên theo định lý ba đường vuông góc ta suy ra $SA \perp BD$. $\square$

BÀI 7. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Lời giải.



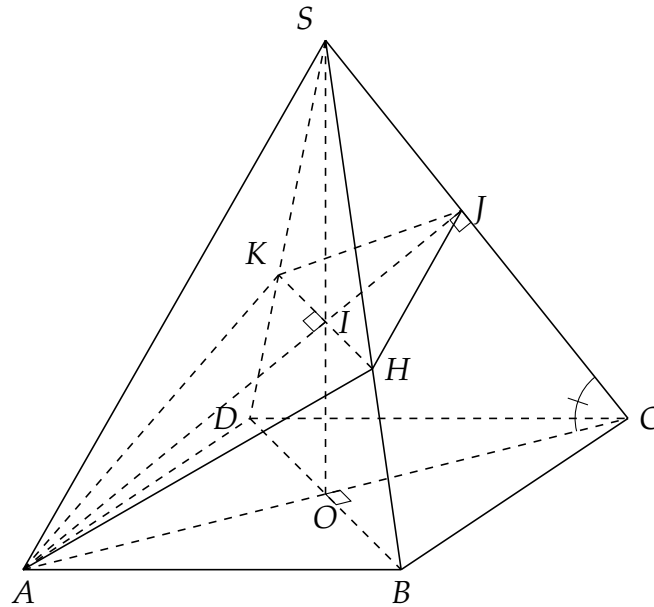
Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có $B'O \perp (ABCD)$. Suy ra BO là hình chiếu vuông góc của BB' lên $(ABCD)$.
Do đó $(BB', (ABCD)) = (BB', BO) = \widehat{B'BO}$.

Ta có $AB = AD = a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$ nên tam giác ABD đều, suy ra $BD = a$ và $BO = \frac{a}{2}$.

Mà trong tam giác $B'BO$, ta có $\cos \widehat{B'BO} = \frac{BO}{BB'} = \frac{1}{2}$ nên $(BB', (ABCD)) = 60^\circ$. $\square$

BÀI 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Tìm góc lớn nhất giữa đường thẳng BD' và mặt phẳng (BDC') .

Lời giải.



Gọi J là hình chiếu vuông góc của A lên SC (1), I là giao điểm của SO và AJ .

Qua I kẻ đường thẳng song song BD cắt SB, SD lần lượt tại H và K .

Vì $BD \perp (SAC)$ nên $HK \perp (SAC)$, suy ra $HK \perp SC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHJK)$ nên tứ giác $AHJK$ là thiết diện của hình chóp khi cắt bởi (P) .

Vì $HK \perp (SAC)$ nên $HK \perp AI$, do đó $S_{AHJK} = \frac{1}{2} AJ \cdot KH = \frac{a^2}{2}$.

Nhận thấy rằng OC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCO} = \widehat{SAC} = \alpha$.

Lúc đó $AJ = AC \sin \alpha = a\sqrt{2} \sin \alpha$, $SO = OC \cdot \tan \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \tan \alpha$.

Ta có $\triangle SOC \sim \triangle SJI$ nên $\widehat{SIJ} = \widehat{SCO} = \alpha$, suy ra $\widehat{AIO} = \widehat{SIJ} = \alpha$, từ đó ta có $OI = OA \cdot \cot \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cot \alpha$.

Trong tam giác SBD , ta có $\frac{HK}{BD} = \frac{SI}{SO} = 1 - \frac{OI}{SO} = 1 - \cot^2 \alpha$, suy ra $KH = DB(1 - \cot^2 \alpha) = a\sqrt{2}(1 - \cot^2 \alpha)$.

Vậy

$$S_{AHJK} = \frac{1}{2} a^2 = a^2 \sin \alpha (1 - \cot^2 \alpha) \Leftrightarrow 4 \sin^2 \alpha - \sin \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \Rightarrow \alpha \approx 57,5^\circ.$$

□

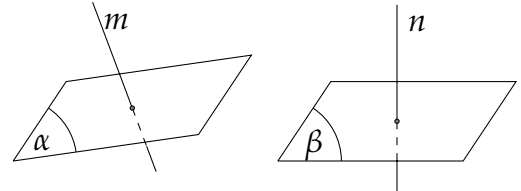
BÀI 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1 ĐỊNH NGHĨA GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

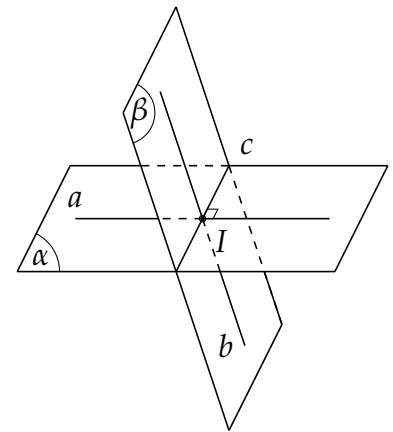
Định nghĩa 1. Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Hai mặt phẳng song song hoặc trùng nhau thì góc giữa chúng bằng 0° .



2 CÁCH XÁC ĐỊNH GÓC CỦA HAI MẶT PHẪNG CẮT NHAU

- ① Tìm giao tuyến c của (α) và (β) .
- ② Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc hai mặt phẳng và cùng vuông góc với c tại một điểm.
- ③ Góc giữa (α) và (β) là góc giữa a và b .



3 DIỆN TÍCH HÌNH CHIẾU CỦA MỘT ĐA GIÁC

Định nghĩa 2. Cho đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (β) . Khi đó diện tích S' của hình $\mathcal{H}$ được tính theo công thức như sau:

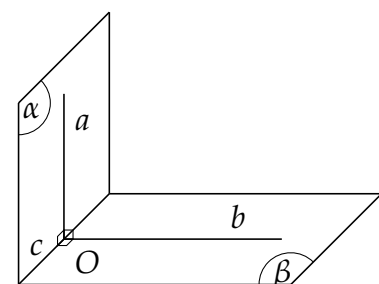
$$S' = S \cdot \cos \varphi$$

với φ là góc giữa (α) và (β) .

4 HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 3. Hai mặt phẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Định lý 1. Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.



Hệ quả 1. Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (β) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (α) .

Định lý 2. Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

5 HÌNH LĂNG TRỤ ĐỨNG, HÌNH HỘP CHỮ NHẬT, HÌNH LẬP PHƯƠNG

Định nghĩa 4. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 5. Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.

Nhận xét: Các mặt bên của hình lăng trụ đều là những hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.

Định nghĩa 6. Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

Nhận xét: Trong hình hộp đứng 4 mặt bên đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 7. Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình hộp chữ nhật đều là hình chữ nhật.

Định nghĩa 8. Hình lập phương là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Tất cả 6 mặt của hình lập phương đều là hình vuông.

6 HÌNH CHÓP ĐỀU VÀ HÌNH CHÓP CỤT ĐỀU

Định nghĩa 9. Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu nó có đáy là một đa giác đều có chân đường cao trùng với tâm của đa giác đáy.

Nhận xét: Hình chóp đều có:

- ① Các mặt bên là những tam giác cân bằng nhau. Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- ② Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.

Định nghĩa 10. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và một thiết diện song song với đáy cắt các cạnh bên của hình chóp đều được gọi là hình chóp cắt đều.

Nhận xét: Hình chóp cắt đều có:

- ① Hai đáy là hai đa giác đều và đồng dạng với nhau.
- ② Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.
- ③ Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 4.1. Tìm góc giữa hai mặt phẳng

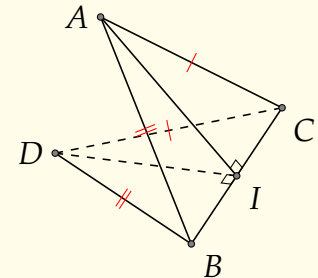
Muốn tìm góc giữa hai mặt phẳng ta có thể tìm góc giữa hai nửa đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng và vuông góc với giao tuyến của chúng.

Một số trường hợp thường gặp:

TH1: $\triangle ABC = \triangle DBC$. Gọi I là chân đường cao của $\triangle ABC$.

Nối DI . Vì $\triangle ABC = \triangle DBC$ nên $DI \perp BC$.

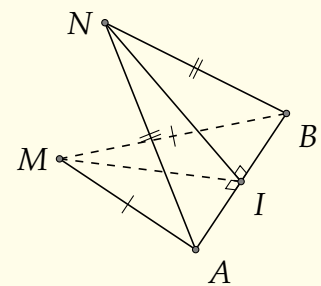
$\Rightarrow ((ABC), (DBC)) = \widehat{AID}$.



TH2: Xét góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và (NAB) với $\triangle MAB$ và $\triangle NAB$ cân có cạnh đáy AB .

Gọi I là trung điểm AB . Khi đó $NI \perp AB$ và $MI \perp AB$.

$\Rightarrow ((MAB), (NAB)) = \widehat{MIN}$.



TH3: Hai mặt phẳng cắt nhau $(\alpha) \cap (\beta) = \Delta$.

Tìm giao tuyến Δ của hai mặt phẳng.

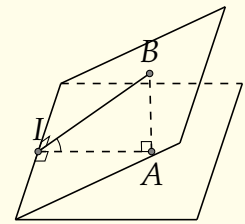
Dựng AB có hai đầu mút nằm ở trên hai mặt phẳng và vuông góc với một mặt. (giả sử là (β)).

Chiếu vuông góc của A hoặc B lên Δ là điểm I .

$\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc giữa hai mặt phẳng.

TH4: Nếu $a \perp (\alpha); b \perp (\beta)$ thì $((\alpha), (\beta)) = (\widehat{a, b})$.

TH5: Trường hợp khó vẽ được góc giữa hai mặt phẳng thì có thể dùng công thức phép chiếu diện tích đa giác.



VÍ DỤ 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{3a}{2}$.

Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

✍️ Lời giải

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α .

Gọi M là trung điểm của BC . Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$.

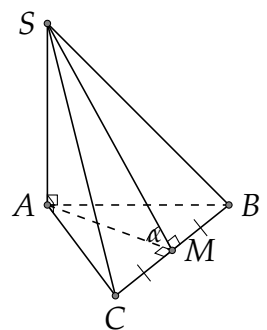
Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$.

Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$.

Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.

Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A , ta có:

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AM} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}, \text{ suy ra } \alpha = 60^\circ.$$



VÍ DỤ 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính số đo của góc giữa các mặt phẳng sau:

- $((SBC), (ABC)) = ?$
- $((SBD), (ABD)) = ?$
- $((SAB), (SCD)) = ?$

Lời giải

- a. Gọi $\alpha = (S, BC, A)$. Khi đó ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

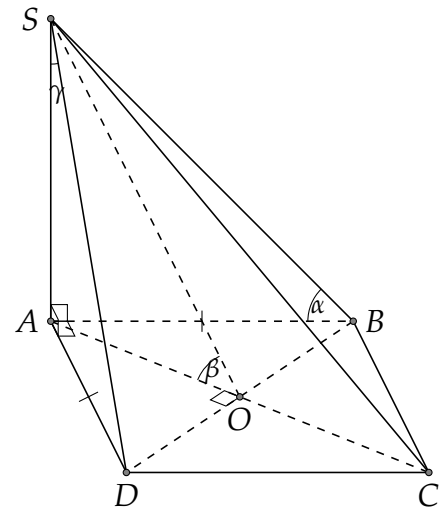
Trong $\triangle SAB$ có $\tan \alpha = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$.

- b. Gọi $\beta = (S, BD, A)$ và $AC \cap BD = O$, ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ SO \perp BD \text{ (Do } BD \perp (SAC)) \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{SOA}$.

Mà $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\tan \beta = \frac{SA}{AO} = \frac{2a\sqrt{3}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \beta = \arctan(\sqrt{6})$.

- c. Gọi $\gamma = ((SAB), (SCD))$.

Khi đó ta có $\gamma = \widehat{ASD}$ và $\tan \gamma = \frac{AD}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \gamma = 30^\circ$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $AB = 2a$; $BC = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$; $SA = 2a$. Gọi M là trung điểm AB . Hãy tính:

- $\left(\widehat{(SBC), (ABC)} \right)$.
- Đường cao AH của $\triangle AMC$.
- $\varphi = \left(\widehat{(SMC), (ABC)} \right)$.

Lời giải.

a. Gọi $\alpha = \widehat{(SBC), (ABC)}$

Trong tam giác ABC ta có $AB \perp BC$ và $SB \perp BC$, suy ra $\alpha = \widehat{SBA}$.

Ta có $AB = SA = 2a$ nên suy ra $\alpha = 45^\circ$.

b. Đường cao AH của ΔAMC .

Ta có $CM = \sqrt{MB^2 + BC^2} = 2a$ và

$$S_{AMC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC - \frac{1}{2}MB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Do đó } AH = \frac{2S_{AMC}}{MC} = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

c. Gọi $\varphi = \widehat{(SMC), (ABC)}$?

$$\text{Do } \begin{cases} AH \perp CM \\ SH \perp CM \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{SHA}.$$

$$\text{Trong } \triangle SHA \text{ có } \tan \varphi = \frac{SA}{AH} = \frac{4a}{a\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right).$$

□

BÀI 2. Trong mặt phẳng (P) cho một $\triangle ABC$ vuông cân, cạnh huyền $BC = a$. Trên nửa đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy điểm S .

a. Tính góc giữa hai mặt phẳng $((SAB), (CAB))$ và $((SAC), (BAC))$ và $((CSA), (BSA))$.

b. Tính SA để góc giữa hai mặt phẳng $((SBC), (ABC))$ có số đo 30° .

Lời giải.

a. Dễ thấy $(SAB) \perp (ABC), (SAB) \perp (SAC), (ABC) \perp (SAC)$, do đó các góc giữa các mặt phẳng $((SAB), (CAB))$ và $((SAC), (BAC))$ và $((CSA), (BSA))$ đều bằng 90° .

b. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $((SBC), (ABC))$.

Gọi M là trung điểm cạnh BC , khi đó ta có

$$\begin{cases} AM \perp BC \\ SM \perp BC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{SMA}.$$

$$\text{Ta có } AM = \frac{a}{2}, \text{ theo đề thì } \tan 30^\circ = \frac{SA}{AM}$$

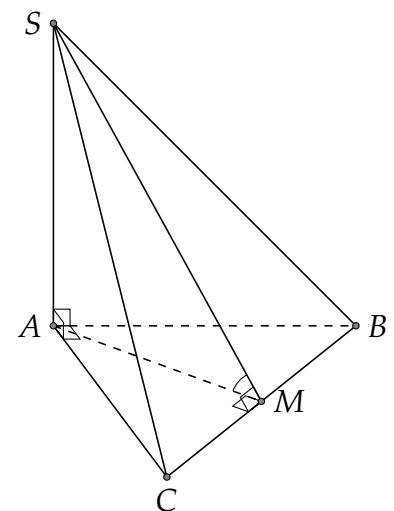
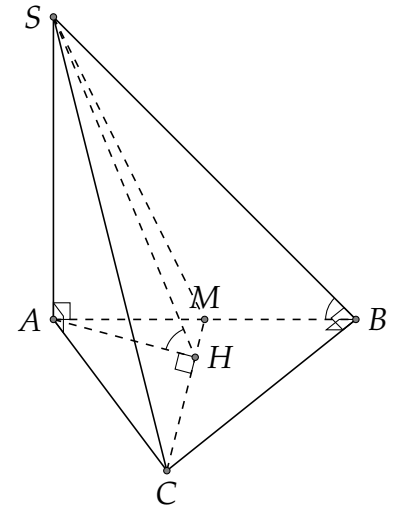
$$\Rightarrow SA = AM \cdot \tan 30^\circ \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}, SA \perp (ABCD)$.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ với $SA = a$.

b) Tìm $x = SA$ để góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$ bằng 60° .



Lời giải.

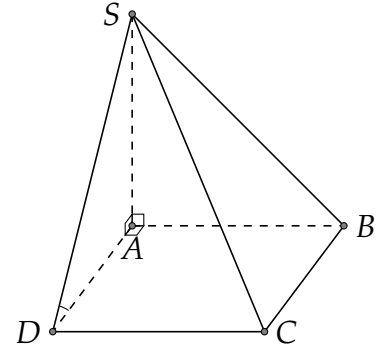
a) Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SA$, theo giả thiết $CD \perp AD$ và $(SCD) \cap (ABCD) = CD$, suy ra $\Rightarrow \alpha = ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SDA}$.

Xét tam giác SAD vuông tại A ta có:

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

b) Theo kết quả câu a ta có: $\tan 60^\circ = \frac{x}{a\sqrt{3}}$

$$\Leftrightarrow x = a\sqrt{3} \tan 60^\circ = 3a.$$



□

BÀI 4. Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền BC nằm trên mặt phẳng (P) . Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi hai đường thẳng AB, AC và mặt phẳng (P) . Gọi φ là góc hợp bởi (ABC) và (P) . Chứng minh rằng $\sin^2 \varphi = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$.

Lời giải.

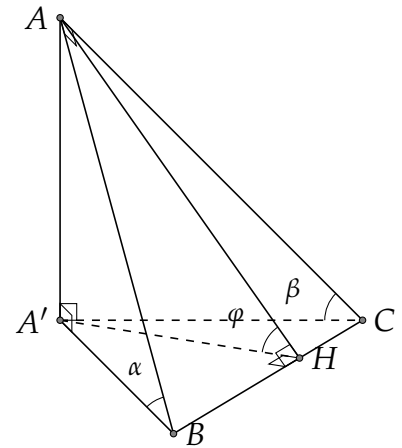
Gọi A' là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P) , AH là đường cao của tam giác ABC .

Suy ra $A'B$ và $A'C$ lần lượt là hình chiếu của AB và AC lên mặt phẳng (P) . Do đó $\alpha = \widehat{ABA'}$ và $\beta = \widehat{ACA'}$.

$$\text{Lại có } \begin{cases} BC \perp AH \\ BC \perp HA' \\ (ABC) \cap (P) = BC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{AHA'}.$$

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{AA'^2}{AH^2} = \frac{AA'^2}{AB^2} + \frac{AA'^2}{AC^2} \Leftrightarrow \sin^2 \varphi = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta.$$



□

BÀI 5. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi α, β, φ lần lượt là góc hợp bởi các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \varphi = 1$.

Lời giải.

Gọi OH, OK, OI lần lượt là các đường cao của các tam giác OBC, OAB, OAC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} AH \perp BC \\ OH \perp BC \\ (OBC) \cap (ABC) = BC \end{cases} \Rightarrow \alpha = \widehat{AHO}.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CK \perp AB \\ OK \perp AB \\ (OAB) \cap (ABC) = AC \end{cases} \Rightarrow \varphi = \widehat{CKO}.$$

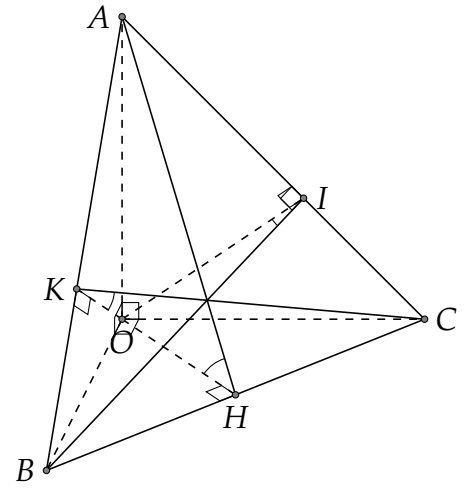
$$\text{Ta có } \begin{cases} BI \perp AC \\ OI \perp AC \\ (OAC) \cap (ABC) = AC \end{cases} \Rightarrow \beta = \widehat{AHO}.$$

$$\cos \alpha = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}; \cos \beta = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}; \cos \varphi = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \varphi &= \left(\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}} \right)^2 + \left(\frac{S_{OAC}}{S_{ABC}} \right)^2 + \left(\frac{S_{OAB}}{S_{ABC}} \right)^2 \\ &= \left(\frac{OB \cdot OC}{2S_{ABC}} \right)^2 + \left(\frac{OI \cdot AC}{2S_{ABC}} \right)^2 + \left(\frac{OA \cdot OB}{2S_{ABC}} \right)^2 \\ &= \frac{OB^2(OA^2 + OC^2) + OI^2 \cdot AC^2}{4S_{ABC}} = \frac{OB^2 \cdot AC^2 + OI^2 \cdot AC^2}{4S_{ABC}} \\ &= \frac{AC^2(OB^2 + OI^2)}{4S_{ABC}} = \frac{AC^2 \cdot BI^2}{4S_{ABC}} = \frac{4S_{ABC}}{4S_{ABC}} = 1. \end{aligned}$$

Suy ra điều phải chứng minh. □



📁 DẠNG 4.2. Tính diện tích hình chiếu của đa giác

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) , S' là diện tích của hình chiếu H' của H trên (Q) , và $\varphi = \left(\widehat{(P), (Q)} \right)$. Khi đó: $S' = S \cdot \cos \varphi$.

VÍ DỤ 1. Cho $\triangle ABC$ cân tại A , đường cao $AH = a\sqrt{3}$, $BC = 3a$ có BC nằm trong (P) . Gọi A' là hình chiếu của A lên (P) . Khi $\triangle A'BC$ vuông tại A' , tính $\left(\widehat{(P); (ABC)} \right)$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Do $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$.

Mặt khác $AA' \perp (P) \Rightarrow A'H \perp BC$.

Do đó $\alpha = \left(\overline{(P); (ABC)} \right) = ((ABC), (A'BC)) = \widehat{AHA'}$.

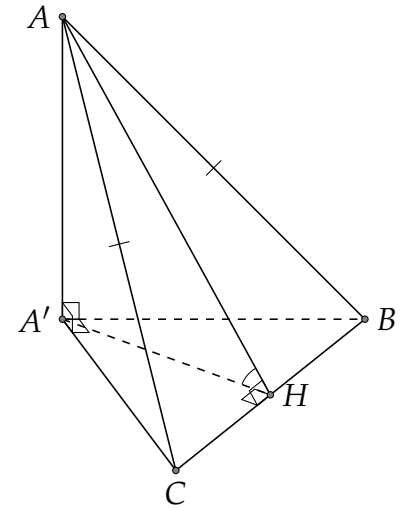
Theo đề ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot BC = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$.

Lại có $A'H = \frac{1}{2} \cdot BC = \frac{3a}{2}$. Suy ra $S_{A'BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3a}{2} \cdot 3a = \frac{9a^2}{4}$.

Khi đó ta có:

$$S_{A'BC} = S_{ABC} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \frac{9a^2}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\alpha = 30^\circ$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = \frac{a}{2}$ và $SA \perp (ABC)$. Tính diện tích tam giác SBC .

Lời giải.

Gọi M là trung điểm cạnh BC . Dễ dàng chứng minh được $\widehat{SMA} = \alpha$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (SBC) .

Mặt khác $SA \perp (ABC)$, suy ra $\triangle ABC$ là hình chiếu của $\triangle SBC$ lên mặt phẳng (ABC) .

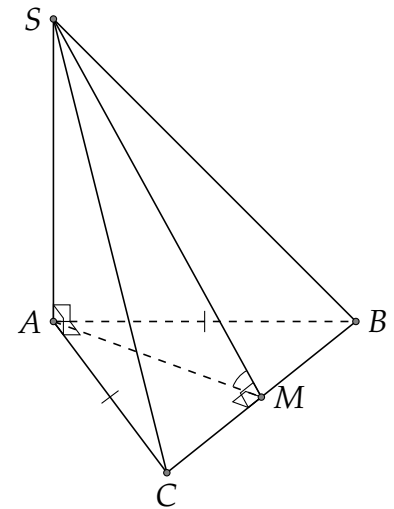
$$\text{Do đó } S_{ABC} = S_{SBC} \cdot \cos \alpha \Rightarrow S_{SBC} = \frac{S_{ABC}}{\cos \alpha}. \quad (1)$$

Lại có $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A , ta có

$$\tan \alpha = \frac{SA}{AM} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

$$\text{Thay vào (1) ta được } S_{SBC} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\cos 30^\circ} = \frac{a^2}{2}.$$



□

BÀI 2. Cho hình thoi $ABCD$ có đỉnh A nằm trong (P) các đỉnh còn lại không nằm trong (P) , $BD = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Chiều vuông góc hình thoi $ABCD$ lên (P) , ta được hình vuông $AB'C'D'$.

a. Tính S_{ABCD} và $S_{AB'C'D'}$ từ đó suy ra $\varphi = \left(\overline{(P); (Q)} \right)$.

b. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của CB và CD với (P) . Tính S_{EFDB} ; $S_{EFD'B'}$.

Lời giải.

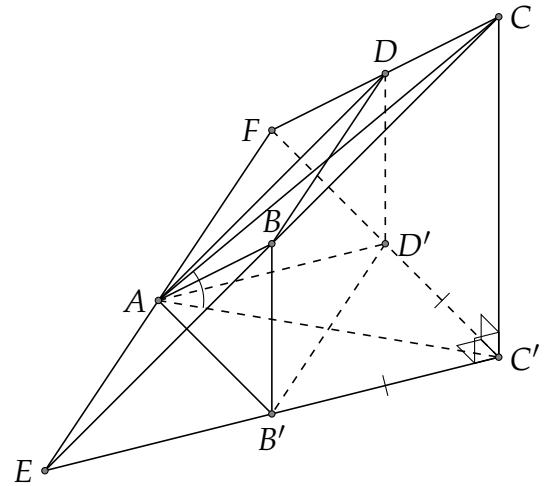
a.

Ta có $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Do $AB'C'D'$ là hình chiếu của $ABCD$ lên (P) và $BD \parallel B'D'$ nên $BD = B'D' = a$. Mà $AB'C'D'$ là hình vuông nên suy ra $AB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Do đó $S_{AB'C'D'} = AB' \cdot AD' = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Mặt khác $S_{AB'C'D'} = S_{ABCD} \cdot \cos \varphi$
 $\Rightarrow \cos \varphi = \frac{2a^2}{2a^2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.



- b. Trong mặt phẳng $(CC'D'D)$ gọi F là giao điểm của CD và $C'D'$, trong mặt phẳng $(BB'C'C)$ gọi E là giao điểm của BC và $B'C'$.

Để thấy $\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ BD \subset (ABCD); B'D' \subset (P) \Rightarrow FE \parallel BD \parallel B'D', \text{ suy ra } BDFE \text{ và } B'D'FE \text{ là các hình} \\ (P) \cap (ABCD) = FE \end{cases}$
 thang cân.

Lại có $AD \parallel BE \Rightarrow ADBE$ là hình bình hành, tương tự cũng có $ABDF$ cũng là hình bình hành.

Suy ra $EF = 2B'D' = 2a$. Do đó $S_{EFD'B'} = \frac{1}{2}(B'D' + EF) \cdot \frac{AC'}{2} = \frac{3a^2}{4}$.

Mà $S_{EFD'B'} = S_{EFD'B} \cdot \cos \varphi \Rightarrow S_{EFD'B} = \frac{S_{EFD'B'}}{\cos \varphi} = \frac{3a^2}{4 \cos 45^\circ} = \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}$.

□

📁 DẠNG 4.3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

Cách 1: Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia. **Cách 2:** Chứng minh góc giữa hai mặt phẳng bằng 90° .

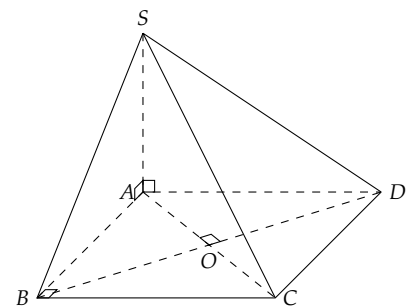
VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng:

- ① $(SAC) \perp (SBD)$.
- ② $(SAB) \perp (SBC)$.

✍️ Lời giải

- ① Ta có $AC \perp BD$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SBD)$.

- ② Ta có $BC \perp AB$, $BC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAB)$.



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

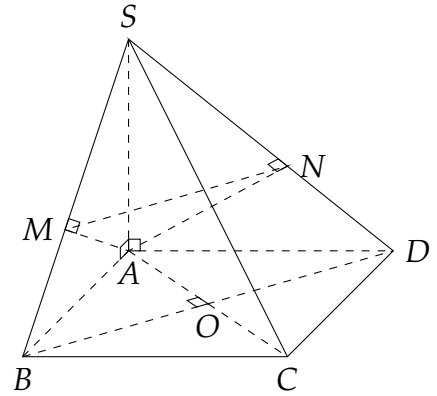
 Lời giải

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).

Do đó $BD \perp (SAC)$.

Mà $MN \parallel BD$ (do $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.

Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC . Chứng minh rằng:

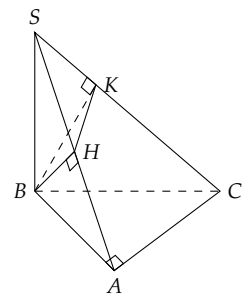
① $(SAC) \perp (SAB)$.

② $(SAC) \perp (BHK)$.

 Lời giải

① Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$).
Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.

② Ta có $SC \perp BK$.
Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$).
Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$.
Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.



□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O với $AB = a$, $AC = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$, $SO \perp (ABCD)$, $SB = a$. Chứng minh rằng $(SAB) \perp (SAD)$.

 Lời giải

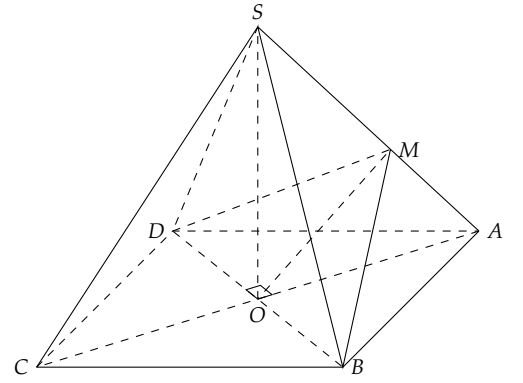
Gọi M là hình chiếu của O lên SA .

Khi đó $SA \perp (MBD)$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) chính là góc giữa hai đường thẳng MB và MD .

$$\text{Ta có } BD = \frac{2a}{\sqrt{3}}, SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } OM = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}BD.$$

Vì thế tam giác MBD vuông cân tại M ,
từ đó $\widehat{BMD} = 90^\circ$ hay $(SAB) \perp (SAD)$.



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

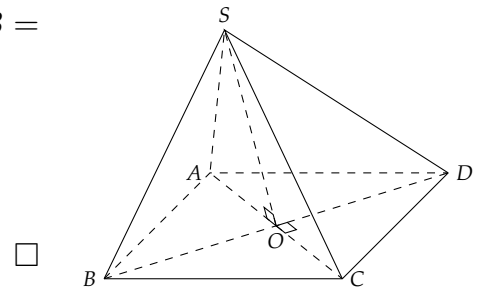
Lời giải.

Ta có $AC \perp BD$.

Gọi O là tâm hình thoi $ABCD$.

Vì $SA = SC$ nên $AC \perp SO$.

Do đó $AC \perp (SBD)$. Vì vậy $(ABCD) \perp (SBD)$.



□

BÀI 2.

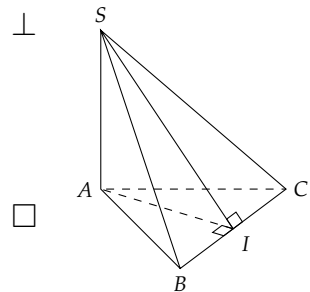
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

Lời giải.

Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $BC \perp SA$.

Vì $AB = AC$ nên $BC \perp AI$.

Do đó $BC \perp (SAI)$. Vì vậy $(SBC) \perp (SAI)$.



□

BÀI 3. Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm AB .

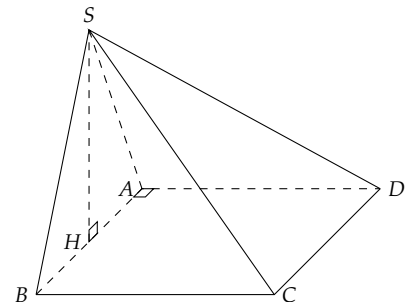
Ta có SAB là tam giác đều nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$,

suy ra $AD \perp SH$.

Mặt khác $AD \perp AB$. Do đó $AD \perp (SAB)$.

Từ đó $(SAD) \perp (SAB)$.

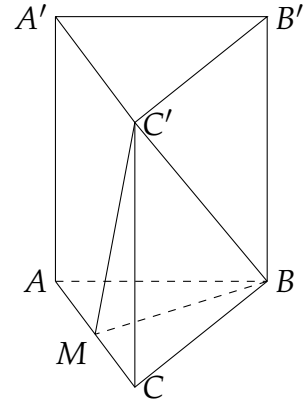


□

BÀI 4. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

Lời giải.

Vì $AB = AC$ nên $BM \perp AC$.
 $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $BM \perp AA'$.
 Do đó $BM \perp (ACC'A')$.
 Vì vậy $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

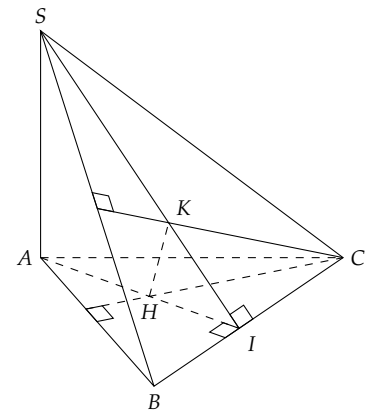


□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.

Lời giải.

Gọi $I = AH \cap BC$. Khi đó $BC \perp (SAI)$,
 suy ra $BC \perp SI$. Do đó S, K, I thẳng hàng.
 Ta có $SB \perp CK$.
 Mặt khác $CH \perp AB, CH \perp SA$ suy ra $CS \perp (SAB)$.
 Từ đó $SB \perp SH$.
 Do đó $SB \perp (CHK)$. Vì vậy $(SBC) \perp (CHK)$.

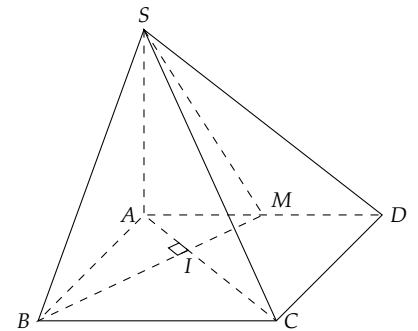


□

BÀI 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

Lời giải.

Gọi $I = AC \cap BM$.
 Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $BM \perp SA$.
 Theo giả thiết ta suy ra $AC^2 = 3a^2, AI^2 = \frac{a^2}{3}$.
 $MI^2 = \frac{1}{9}MB^2 = \frac{a^2}{6}$ Do đó $AI^2 + MI^2 = MA^2$.
 Từ đó $BM \perp AC$.
 Suy ra $BM \perp (SAC)$. Vì vậy $(SBM) \perp (SAC)$.

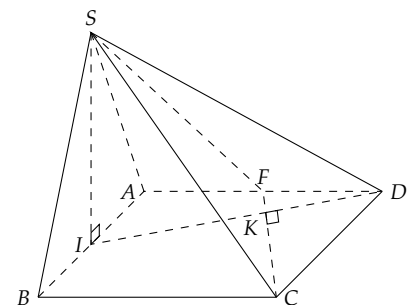


□

BÀI 7. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD . Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

Lời giải.

Gọi $K = CF \cap ID$.
 Tam giác SAB đều nên $SI \perp AB$.
 Mà $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SI \perp (ABCD)$,
 suy ra $CF \perp SI$.
 Mặt khác $\widehat{KFD} + \widehat{KDF} = \widehat{KFD} + \widehat{KCD} = 90^\circ$.
 Suy ra $CF \perp ID$. Do đó $CF \perp (SID)$.
 Vì vậy $(SFC) \perp (SID)$.



□

📁 DẠNG 4.4. Thiết diện chứa một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng

Xác định mặt phẳng (β) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α) cho trước bằng cách:

- ① Từ điểm A bất kì thuộc đường thẳng d dựng $AH \perp (\alpha)$. Mặt phẳng (AH, d) là mặt phẳng (β) .
- ② Tìm giao điểm của mặt phẳng (β) và các cạnh của hình chóp, hình lăng trụ ... Từ đó suy ra thiết diện.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi (P) là mặt phẳng chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC) . Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) cắt hình chóp.

✍️ Lời giải

Kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

Ta có $\begin{cases} AD \perp SA \text{ (} SA \perp (ABCD) \text{)} \\ AD \perp AB \end{cases}$

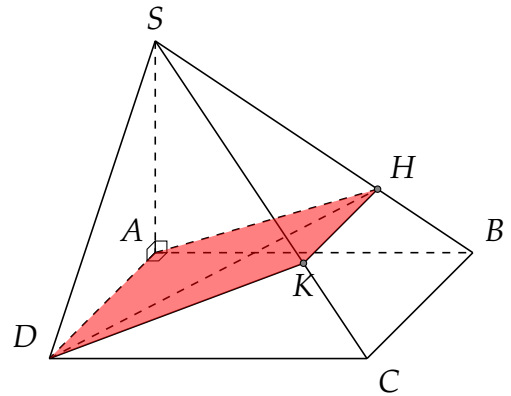
$\Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow AD \perp SB$.

Ta có $AD \perp SB$ và $AH \perp SB$ nên $SB \perp (ADH)$, suy ra $(SBC) \perp (ADH)$.

Do đó, mặt phẳng (P) chứa AD và vuông góc với mặt phẳng (SBC) là (ADH) .

Trong mặt phẳng (SBC) dựng $HK \parallel BC$ ($K \in BC$), suy ra $HK \parallel AD$ (do cùng song song với AD).

Vậy thiết diện là hình thang $ADKH$ có hai đáy là AD và HK .



□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC = 3MC$. Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (ABC) . Gọi (α) là mặt phẳng chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt tứ diện.

✍️ Lời giải

Ta có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$.

Vì $OH \perp BC$ (do $OH \perp (ABC)$) và $OA \perp BC$ (do $OA \perp (OBC)$) nên $BC \perp (OAH)$, suy ra $BC \perp AH$ (1).

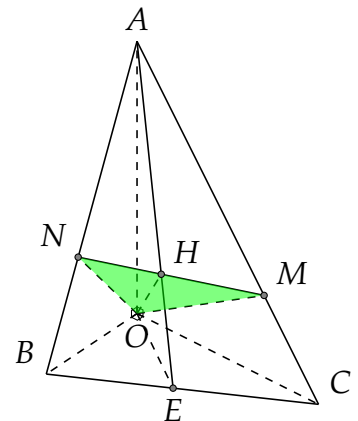
Tương tự ta có $AC \perp BH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của $\triangle ABC$.

Ta có $OH \perp (ABC)$ nên mặt phẳng (α) chứa OM và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là (OHM) .

Trong mặt phẳng (ABC) gọi N là giao điểm của HM và AB , suy ra thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện là $\triangle OMN$.

Do $OA = OB = OC = a$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc nhau nên $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$, suy ra $\triangle ABC$ đều.



□

Mà H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH cắt BC tại trung điểm của đoạn BC .
Gọi E là trung điểm BC .

Ta có H là trọng tâm $\triangle ABC$ nên $3HE = AE$. Do đó, $MN \parallel BC$, suy ra $MN = \frac{2}{3}BC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Vì $\triangle AOE$ vuông tại A nên $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{3}{4a^2}$, suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot OH = \frac{2a^2\sqrt{6}}{9}$.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O , cạnh a , SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2a$. Gọi I là trung điểm của SB , (α) là mặt phẳng chứa OI và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định và tính diện tích thiết diện do mặt phẳng (α) cắt hình chóp.

Lời giải.

Trong (SAC) kẻ $OJ \parallel SA (J \in SC) \Rightarrow J$ là trung điểm SC .

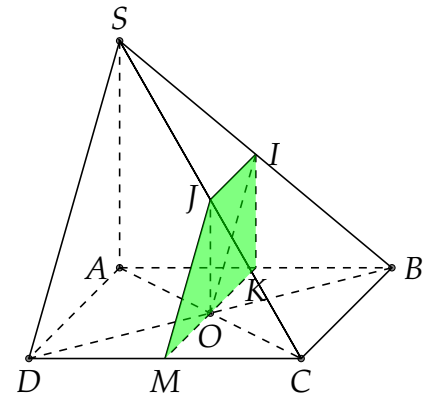
Ta có $OJ \perp (ABCD)$. Mp (α) là (OIJ) .

Gọi K là trung điểm AB . Trong $(ABCD)$ gọi M là giao điểm của OK và CD .

Thiết diện là hình thang $IJKM$ vuông tại I và K .

$IK = a, IJ = \frac{a}{2}, KM = a$.

$S_{IJKM} = \frac{3a^2}{4}$.



□

BÀI 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2a, AB = BC = a$, SA vuông góc với đáy, $SA = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm BC . Xác định và tính diện tích thiết diện của mặt phẳng chứa SE và vuông góc với mặt phẳng (SAC) với hình chóp.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của $AD \Rightarrow ABCI$ là hình vuông $\Rightarrow AC \perp BI$ (1). Ta có $BCDI$ là hình bình hành $\Rightarrow BI \parallel CD$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp CD$. Ta có $CD \perp (SAC)$.

Kẻ $EF \parallel CD (F \in AD)$. Suy ra $EF \perp (SAC) \Rightarrow (SEF) \perp (SAC)$.

Mp chứa SE và vuông góc (SAC) là mặt phẳng (SEF) .

Thiết diện của mp (SEF) với hình chóp là tam giác SEF .

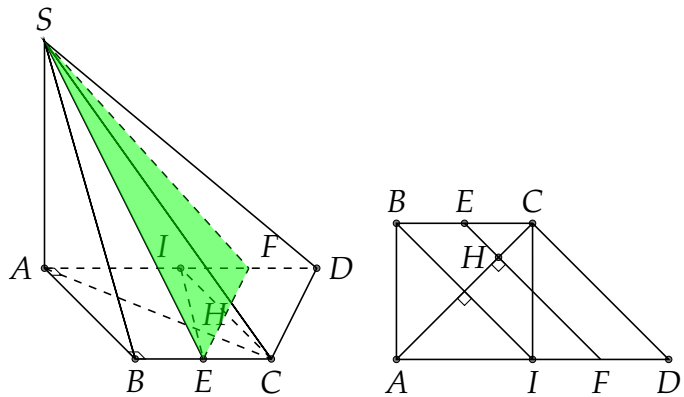
Gọi $H = AC \cap EF$.

Ta có $EF \perp SH$.

Ta có $EFDC$ là hình bình hành $\Rightarrow EF = CD = a\sqrt{2}$.

$AH = AF \cdot \cos 45^\circ = \frac{5\sqrt{2}a}{4}$. Vậy $S_{\triangle SEF} = \frac{1}{2}SH \cdot EF = \frac{5a^2}{4}$.

□



BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $SA \perp (ABC)$, $SA = AC = a$. Gọi I lần lượt là trung điểm của SB . Lấy điểm M trên cạnh AC sao cho $3AM = AC$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa IM và vuông góc với mặt phẳng (SAC) . Xác định và tính diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) và hình chóp.

Lời giải.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $MN \parallel BC$ ($N \in AB$). Ta có $BC \perp (SAC)$. Mà $MN \parallel BC$ nên $MN \perp (SAC)$. Suy ra $(IMN) \perp (SAC)$.

Mặt phẳng chứa IM và vuông góc với mặt phẳng (SAC) là mặt phẳng (IMN) .

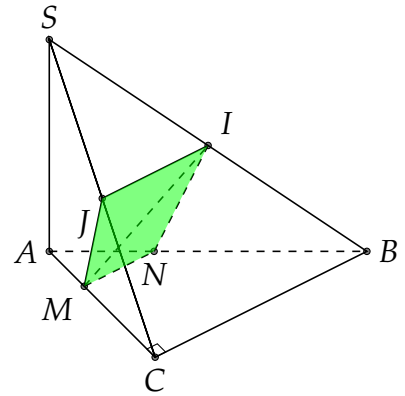
Gọi J là trung điểm SC . Ta có $IJ \parallel MN$. Suy ra thiết diện cắt bởi (IMN) và hình chóp là hình thang $IJMN$ vuông tại M và J .

$$\text{Ta có } MN = \frac{1}{3}BC = \frac{a}{3}, IJ = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2},$$

$$OM^2 = \sqrt{JC^2 + MC^2 - 2JC \cdot MC \cdot \cos \widehat{JCM}}$$

$$= \frac{20a^2}{36} \Rightarrow JM = \frac{2a\sqrt{5}}{6} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Vậy } S_{MNJI} = \frac{1}{2}(MN + IJ)MJ = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{3} + \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a\sqrt{5}}{3} = \frac{5\sqrt{5}a^3}{36}.$$



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = CD = SA = a$, SA vuông góc với đáy. Gọi I, M lần lượt là trung điểm SB, AD . Gọi (P) là mặt phẳng chứa IM và vuông góc (SAD) . Tính diện tích thiết diện do (P) cắt hình chóp.

Lời giải.

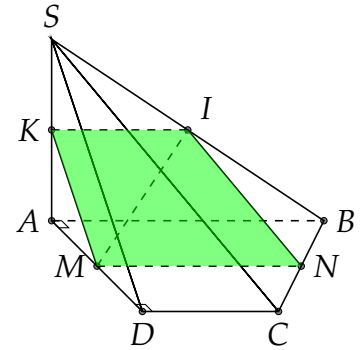
Gọi N là trung điểm BC . Ta có $MN \parallel AB \parallel CD$ và $MN \perp AD$.

Ta có $MN \perp (SAD) \Rightarrow (IMN) \perp (SAD)$.

Mặt phẳng (P) là (IMN) .

Kẻ $IK \parallel AB$ ($K \in SA$). Thiết diện là hình thang $IKMN$ vuông tại K và M .

$$MN = \frac{3a}{2}, IK = a, KM = \frac{a\sqrt{2}}{2} \text{ suy ra } S_{IKMN} = \frac{5\sqrt{2}a^2}{8}.$$



□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SCD)$.

Lời giải.

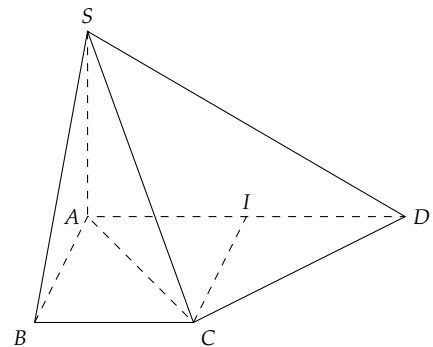
Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $CD \perp SA$.

Gọi I là trung điểm AD .

Khi đó $ABCI$ là hình vuông và tam giác ICD vuông cân tại I .

Từ đó $\widehat{ACD} = 90^\circ$ hay $CD \perp AC$.

Do đó $CD \perp (SAC)$. Vì vậy $(SCD) \perp (SAC)$.



□

BÀI 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Lời giải.

Gọi O là tâm $ABCD$.

Vì $A'B = A'D$ nên $A'O \perp BD$.

Vì $MB = MD$ nên $MO \perp BD$.

Suy ra góc giữa $(A'BD)$ và (MBD) là góc giữa $A'O$ và MO .

Do đó $(A'BD) \perp (MBD)$ khi

$$\widehat{A'OM} = 90^\circ \Leftrightarrow A'O^2 + OM^2 = A'M^2.$$

$$\text{Ta có: } A'O^2 = b^2 + \frac{a^2}{2}.$$

$$OM^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{2}.$$

$$A'M^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Vì vậy để $(A'BD) \perp (MBD)$ thì

$$\frac{5b^2}{4} + a^2 = 2a^2 + \frac{b^2}{4} \Leftrightarrow b = a.$$

Vậy $\frac{b}{a} = 1$ thì $(A'BD) \perp (MBD)$.

□

BÀI 7. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B và $BB' = a\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC, AA' . Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, CM .

① Chứng minh $(AC'B) \perp (BMN)$.

② Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) chứa IJ và vuông góc (BMN) với hình lăng trụ.

Lời giải.

① Ta có $AC = a\sqrt{2}$ và $AA' = a\sqrt{2}$, Suy ra $AA'C'C$ là hình vuông. Do đó $AC' \perp A'C$. Mà $MN \parallel A'C$ nên $MN \perp AC'$ (1)

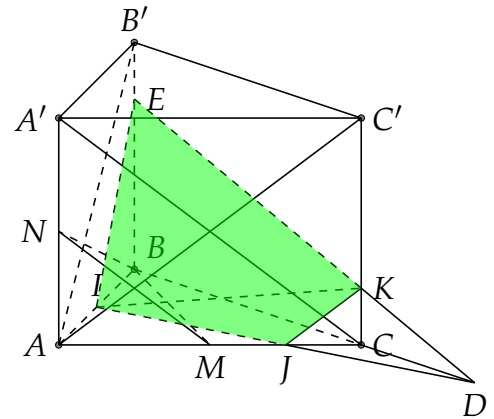
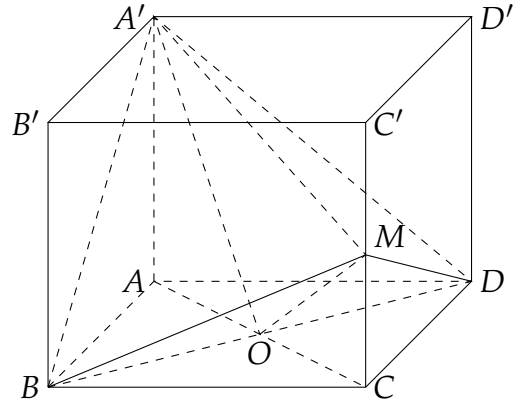
Ta có $BM \perp AC$ (do $\triangle ABC$ vuông cân tại B và M là trung điểm AC) và $BM \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$). Suy ra $BM \perp (AA'C'C)$. Do đó $BM \perp AC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC' \perp (BMN)$. Vậy $(AC'B') \perp (BMN)$.

② Kẻ $JK \parallel AC'$ ($K \in CC'$). Ta có $JK \perp (BMN)$. Suy ra $(IJK) \perp (BMN)$. M $\mathbf{p}$ (α) là (IJK) .

Trong (ABC) gọi $D = IJ \cap BC$, trong $(BB'C'C)$ gọi $E = DK \cap BB'$. Thiết diện là tứ giác $IJKE$.

□

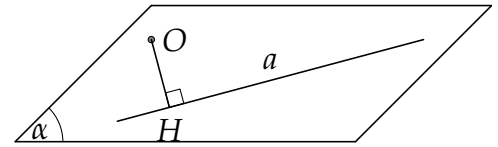


BÀI 5. KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

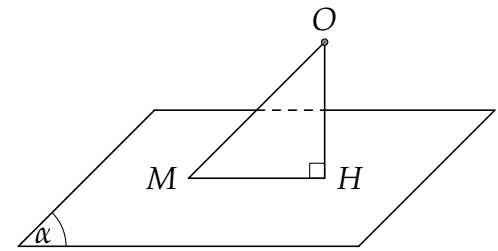
1 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Cho điểm O và một đường thẳng a . Trong (O, a) gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên a . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến a , kí hiệu $d(O, a) = OH$.



2 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM TỚI MỘT MẶT PHẪNG

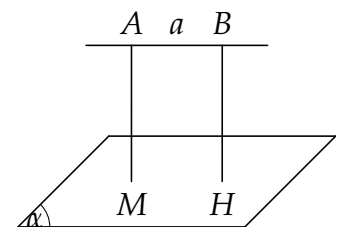
Cho mặt phẳng (α) và một điểm O , gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α) . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(O, (\alpha)) = OH$.



$$\triangle OH \leq OM, \forall M \in (\alpha)$$

3 KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐƯỜNG THẲNG TỚI MỘT MẶT PHẪNG SONG SONG

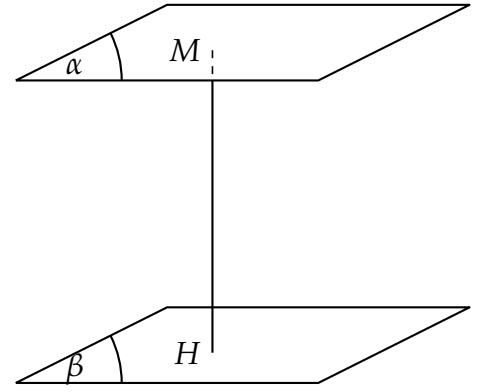
Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) . Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) là khoảng cách từ một điểm bất kì của a đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(a, (\alpha))$.



$$\triangle d(a, (\alpha)) = d(A, (\alpha)), \forall A \in a.$$

4 KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

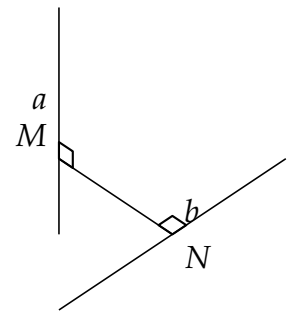
Cho hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau, khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia được gọi là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β) .
 $d((\alpha), (\beta)) = d(M, (\beta)) = d(N, (\alpha)), M \in (\alpha), N \in (\beta)$.



5 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC CHUNG VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU

Định nghĩa 1.

- Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b .
- Nếu đường thẳng vuông góc chung Δ cắt hai đường chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

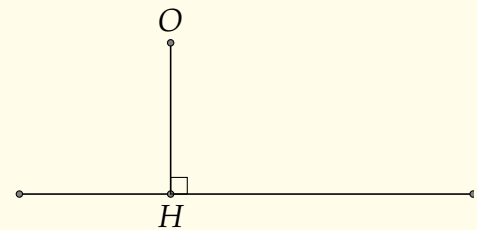


B CÁC DẠNG TOÁN

📁 DẠNG 5.1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng (d) , ta thực hiện các bước sau:

- Trong mặt phẳng $(O; d)$, hạ $OH \perp (d)$ tại H .
- Tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác và đường tròn.



VÍ DỤ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

✍️ Lời giải

Ta có $\triangle BAC' = \triangle CA'A = \triangle DAC' = \triangle A'AC = \triangle B'C'A = \triangle D'C'A$ chung đáy AC' nên khoảng cách từ B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau.

Hạ $CH \perp AC'$, ta được $\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{C'C^2} \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. □

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB .

- ① Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.
- ② Tính khoảng cách từ I đến CM , từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM .

Lời giải

① Trong $\triangle SAC$, OI là đường trung bình nên $OI \parallel SA \Rightarrow OI \perp (ABCD)$.

② Hạ $IH \perp CM$ tại H . Ta có $CM \perp (IOH)$ suy ra $CM \perp OH$.

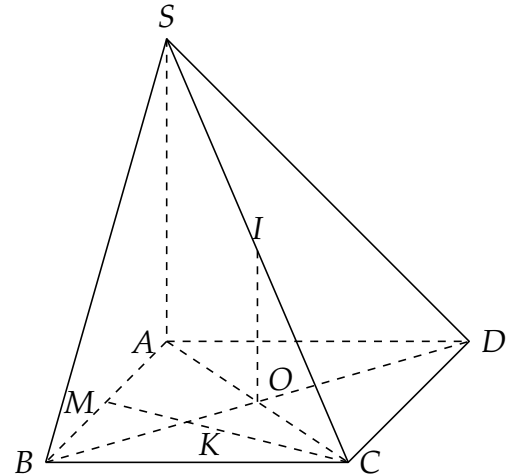
Gọi K là trọng tâm tam giác ABC , ta có $OB = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $OK = \frac{OB}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{6}$.

Trong $\triangle OCK$: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OK^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow OH = \frac{a}{\sqrt{20}}$.

Trong $\triangle OIH$: $IH^2 = OI^2 + OH^2 \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Ta có $SI \cap CM = C$ suy ra $\frac{d(S, CM)}{d(I, CM)} = \frac{SC}{IC} = 2 \Rightarrow$

$$d(S, CM) = \frac{a\sqrt{30}}{5}$$

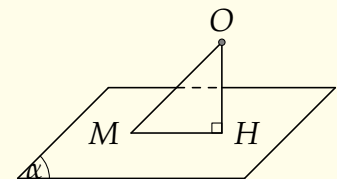


□

DẠNG 5.2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

Cho mặt phẳng (α) và một điểm O , gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (α) . Khi đó khoảng cách OH được gọi là khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α) , kí hiệu $d(O, (\alpha)) = OH$



Tính chất 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm trên đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là như nhau.

Tính chất 2. Nếu $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BM}$ thì $d(A, (P)) = |k|d(B, (P))$, trong đó (P) là mặt phẳng đi qua M .

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$.

Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$

nên $BC \perp (SAB)$. Do $BC \subset (SBC)$

nên $(SBC) \perp (SAB)$.

Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$.

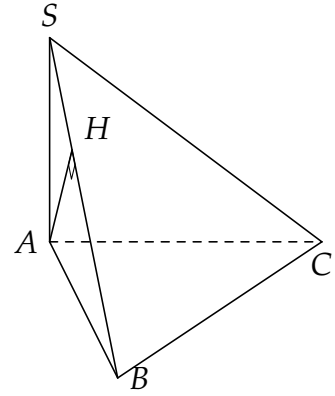
Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$

nên

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$



□

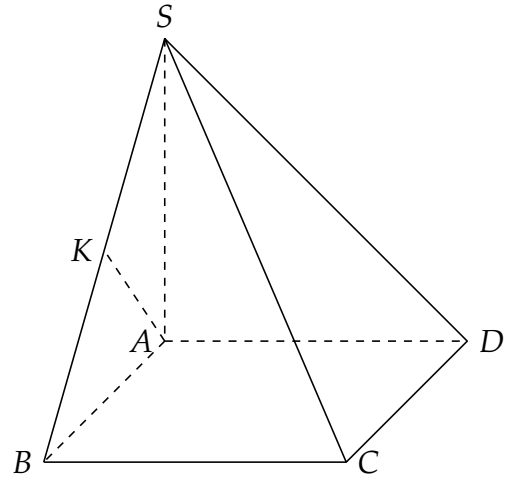
VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Do $AD \parallel BC$ nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Gọi K là hình chiếu của A trên SB , suy ra $AK \perp SB$.

$$\text{Khi } d[A, (SBC)] = AK = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD)$.

Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$.

Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$.

Vậy $CD \perp (SHE)$.

Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$.

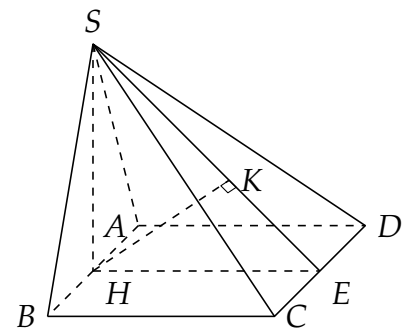
Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$.

Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$.

$$\text{Khi đó } d(H, (SCD)) = HK. \text{ Vì } AB = a \text{ nên } SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$$

Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.



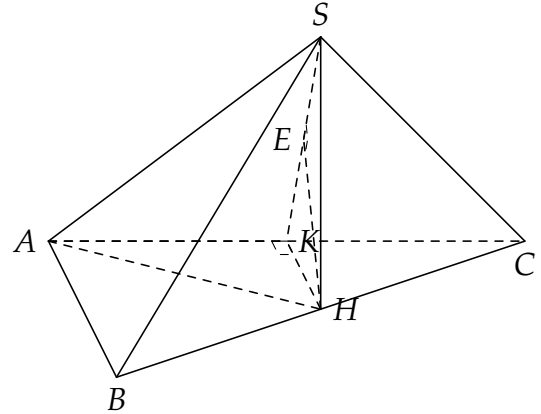
Khi đó $\frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{7}{3a^2}$. Nên $HK = \frac{\sqrt{21}a}{7}$. Vậy $d(H, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}$.

□

VÍ DỤ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải

Gọi H là trung điểm của BC ,
suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.
Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$.
Kẻ $HE \perp SK (E \in SK)$.
Khi đó $d(B, (SAC)) = 2d(H, (SAC))$
 $= 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$.

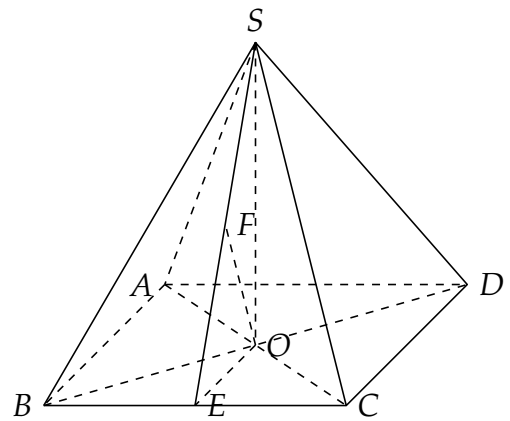


□

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên là $2a$ và diện tích đáy là $4a^2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.
Ta có $d(A, (SBC)) = 2d(O, (SBC))$.
Kẻ $OE \perp BC, OF \perp SE$ ta có
 $\begin{cases} BC \perp OE \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOE) \Rightarrow BC \perp OF$ mà $OF \perp SE \Rightarrow OF \perp (SBC)$.
Ta có $S_{ABCD} = AB^2 = 4a^2 \Rightarrow AB = 2a \Rightarrow OE = a$.
Ta có $AC = 2a\sqrt{2} \Rightarrow OA = a\sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = a\sqrt{2}$.
Ta có $\frac{1}{OF^2} = \frac{1}{OS^2} + \frac{1}{OE^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
 $\Rightarrow d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$.



□

VÍ DỤ 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA = SB = SC = a$ và SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau. Tính theo a khoảng cách h từ điểm S đến mặt phẳng (ABC) .

Lời giải

Gọi H là chân đường cao hạ từ S xuống (ABC) và $M = AH \cap BC$.

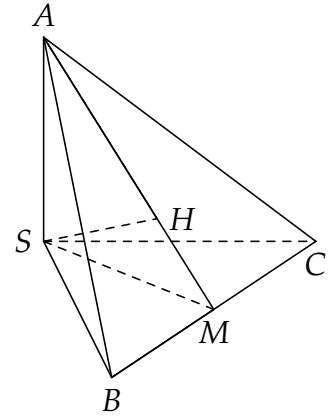
Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow BC \perp SH$.

Lại có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC \Rightarrow BC \perp SA$.

Như vậy $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Từ $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp SM$

$$\text{Do đó } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



□

VÍ DỤ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ A đến (SCD) .

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB , suy ra $SH \perp AB$.

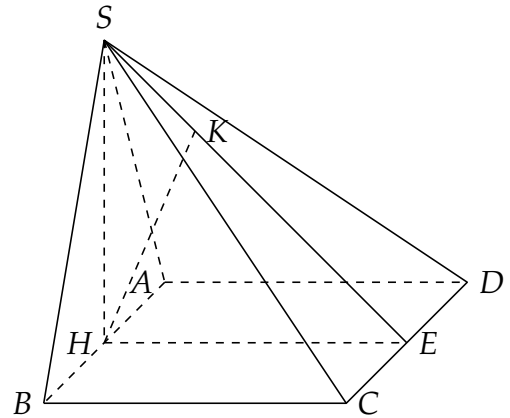
Do đó $SH \perp (ABCD)$.

Do $AH \parallel CD$ nên $d(A, (SCD)) = d(H, (SCD))$.

Gọi E là trung điểm CD ; K là hình chiếu vuông góc của H trên SE .

$$\text{Khi đó } d(H, (SCD)) = HK = \frac{SH \cdot HE}{\sqrt{SH^2 + HE^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

$$\text{Vậy } d(A, (SCD)) = HK = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$



□

VÍ DỤ 8. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A cạnh $AB = 3a, BC = 5a$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt phẳng (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(ACC'A')$.

Lời giải

Gọi H, N lần lượt là trung điểm của cạnh BC và AB , ta có $B'H \perp (ABC)$ và $HN \perp AB$. Suy ra góc giữa hai mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt phẳng (ABC) là $\widehat{B'NH} = 60^\circ$.

$$\text{Ta có } HN = \frac{AC}{2} = 2a.$$

Gọi E là giao điểm của $B'H$ và CC' nên H là trung điểm của $B'E$.

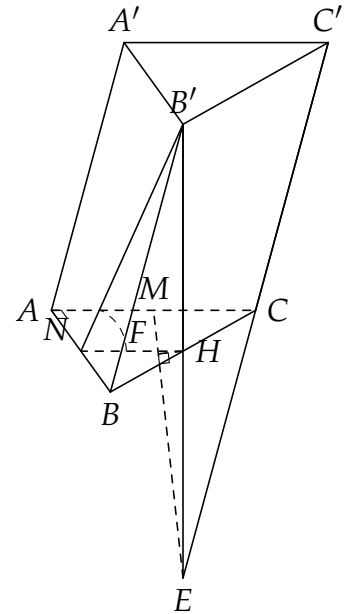
Gọi M là trung điểm của AC , F là hình chiếu của H lên ME .

Ta chứng minh được $HF \perp (ACC'A') \Rightarrow d(H, (ACC'A')) = HF = \frac{1}{2}d(B', (ACC'A'))$.

$$\text{Ta có } HM = \frac{1}{2}AB = \frac{3a}{2}; HE = B'H = 2a\sqrt{3}.$$

Tam giác MHE vuông tại H có đường cao HF

$$\text{Do đó } d(B', (ACC'A')) = 2HF = \frac{12a\sqrt{19}}{19}.$$



□

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $a\sqrt{3}$. Cạnh $SA = 2a$ là vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Tam giác ABC đều, kẻ $AM \perp BC$ ($M \in BC$) $\Rightarrow M$ là trung điểm của cạnh BC .

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM).$$

Khi đó kẻ

$$AH \perp SM$$
 ($H \in SM$) $\Rightarrow BC \perp AH$.

Như vậy

$$\begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d = d(A; (SBC)) = AH.$$

Ta có

$$AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{25}{36a^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6}{5}a \Rightarrow d = \frac{6}{5}a.$$

□

BÀI 2. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $AB = BC = 2a$ và $\widehat{ABC} = 120^\circ$. Cạnh $SA = 3a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính khoảng cách d cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

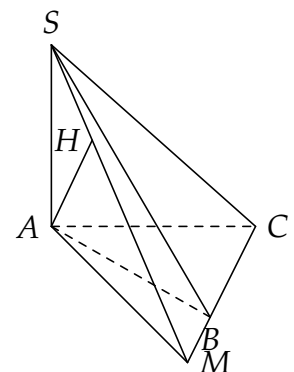
Lời giải.

Kẻ $AM \perp BC$ ($M \in BC$), ta có

$$\begin{cases} CM \perp SA \\ CM \perp AM \end{cases} \Rightarrow CM \perp (SAM) \Rightarrow CM \perp AM.$$

$$\text{Ta có } AM = 2a \sin 60^\circ = a\sqrt{3}$$

$$\text{Xét } \triangle SAM \text{ ta có } \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} \Rightarrow d = \frac{3a}{2}$$



□

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a ; SA vuông góc với đáy; SB hợp với đáy góc 45° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải.

Ta có $45^\circ = \widehat{SB, (ABCD)} = \widehat{SBA} \Rightarrow SA = AB = a$.

Gọi O là giao điểm của AC với BD .

Ta có $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

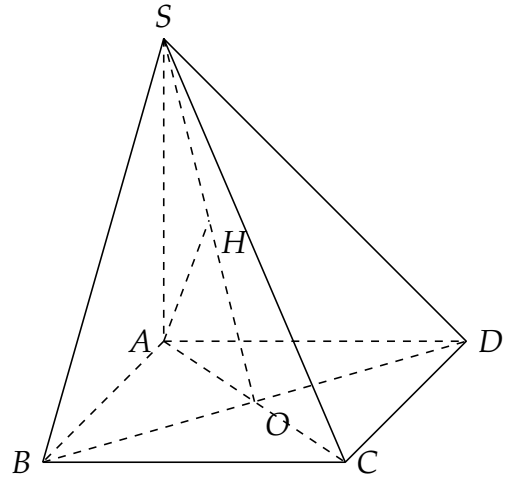
Kẻ $AH \perp SO$ ta có

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH$$

mà $AH \perp SO \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AO^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow AH = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\Rightarrow d(C, (SBD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$



□

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h .

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của BC , ta có $\begin{cases} AI \perp BC \\ SA \perp BC \end{cases} \Rightarrow (SAI) \perp BC$

Vậy $\widehat{AIS}$ chính là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)

$\Rightarrow \widehat{AIS} = 60^\circ$.

Trong (SBC) kẻ $AH \perp SI$. Ta có $\begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow AH \perp BC$.

Vậy $\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác AIS ta có

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{AS^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{h^2} = \frac{4h^2 + 3a^2}{3a^2h^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

$$\text{Hay } d(A, (SBC)) = \frac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{4h^2 + 3a^2}}.$$

□

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $BA = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên SB . Tính khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Trong $(ABCD)$ gọi $M = AB \cap CD$, trong (SAM) gọi $K = AH \cap SM$, kẻ $AE \perp SC$ tại E và gọi N là trung điểm của AD .

Dễ thấy $ABCN$ là hình vuông nên $NC = AB = a$. Do đó $NA = NC = ND = a \Rightarrow \triangle ACD$ vuông tại C

$\Rightarrow CD \perp AC$, lại có $CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SAC) \perp (SCD)$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} (SAC) \perp (SCD) \\ (SAC) \cap (SCD) = SC \\ AE \subset (SAC) \\ AE \perp SC \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SCD)$$

Trong (AKE) kẻ $HF \parallel AE, F \in KE$, thì từ (1) suy ra $HF \perp (SCD)$
 $\Rightarrow d(H, (SCD)) = HF$.

Do $BC \parallel AD \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AD} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2AB = 2a$

Suy ra B là trung điểm của MA .

Lại có $\frac{BH}{BS} = \frac{BH \cdot BS}{BS^2} = \frac{BA^2}{AB^2 + AS^2} = \frac{a^2}{a^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{3}$.

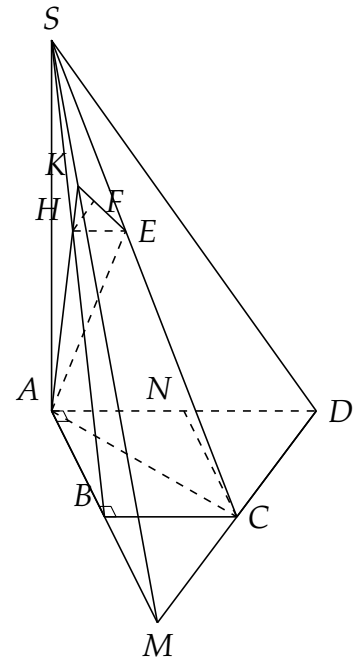
Vậy H là trọng tâm của tam giác SAM , do đó

$$\frac{HF}{AE} = \frac{KH}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow HF = \frac{1}{3}AE.$$

Tứ diện $ADMS$ có ba cạnh AD, AM, AS đôi một vuông góc và $AE \perp (SMD)$ nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{AE^2} &= \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AS^2} \\ &= \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{2a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \Rightarrow AE = a. \end{aligned}$$

Vậy $d(H, (SCD)) = HF = \frac{1}{3}AE = \frac{a}{3}$.



△ Từ bài trên ta thấy nếu đường thẳng AB cắt (α) tại I thì $\frac{d(A, (\alpha))}{d(B, (\alpha))} = \frac{IA}{IB}$.

□

BÀI 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = a, AD = b, AA' = c$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(DA'C')$.

Lời giải.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ADD'A'$ thì I là trung điểm của AD' .

$$\text{Ta có } \frac{d(A, (DA'C'))}{d(D', (DA'C'))} = \frac{IA}{ID'} = 1$$

$$\Rightarrow d(A, (DA'C')) = d(D', (DA'C')).$$

Mặt khác ta có tứ diện $D'ADC'$ có các cạnh $D'D, D'A', D'C'$ đôi một vuông góc nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{d^2(D', (DA'C'))} &= \frac{1}{D'D^2} + \frac{1}{D'A'^2} + \frac{1}{D'C'^2} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \\ &= \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(A, (DA'C')) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} =$$

$$\frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

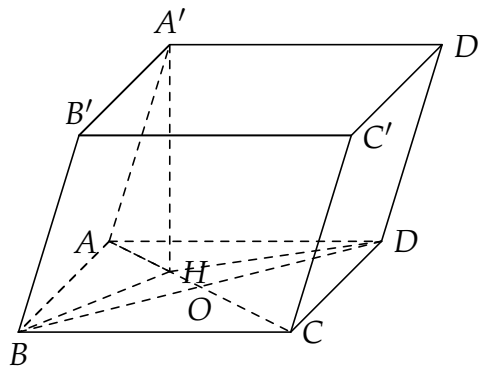
□

BÀI 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

Lời giải.

Do $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$ nên các tam giác ABA', ABD, ADA' đều là các tam giác đều cạnh a

$\Rightarrow A'A = A'B = A'D$ (A' cách đều ba đỉnh của $\triangle ABD$).



Gọi H là hình chiếu của A' trên $(ABCD)$ thì các tam giác vuông $A'HA, A'HB, A'HD$ bằng nhau nên

$$HA = HB = HD.$$

Do đó H là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Gọi O giao điểm của AC và BD , ta có

$$AH = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\begin{aligned} A'H &= \sqrt{AA'^2 - AH^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} \\ &= a\sqrt{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } d(A', (ABCD)) = A'H = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

□

📁 DẠNG 5.3. Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song

- ① Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) , để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện
 - Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d(d; (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- ② Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước
 - Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d((\beta); (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

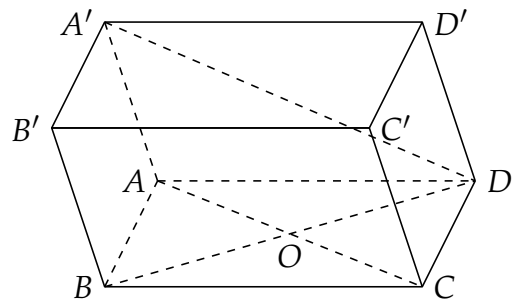
VÍ DỤ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $A'B'C'D'$.

✍️ Lời giải

Hạ $A'H \perp AC$. Ta có $BD \perp (OAA')$ suy ra $BD \perp A'H \Rightarrow A'H \perp (ABCD)$. Do $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$ nên $A'H$ là khoảng cách giữa hai mặt đáy.

$$A'.ABD \text{ là hình chóp đều nên } AH = \frac{2}{3}AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = \frac{2a^2}{3} \Rightarrow A'H = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$



□

VÍ DỤ 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

✍️ Lời giải

Ta chứng minh được $(MNP) \parallel (SBC)$.

Suy ra $d((MNP); (SBC)) = d(P; (SBC))$.

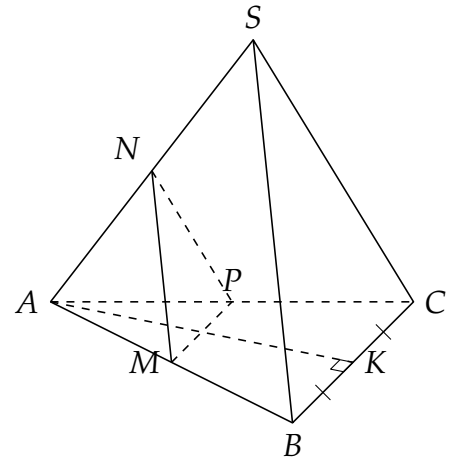
$$AP \cap (SBC) = C \text{ suy ra } d(P; (SBC)) = \frac{AP}{AC} d(A; (SBC)) = \frac{1}{2} d(A; (SBC)).$$

Gọi K là trung điểm của BC . Tam giác ABC đều suy ra $AK \perp BC$.

Do $(ABC) \perp (SBC)$ theo giao tuyến BC nên $AK \perp (SBC)$.

$$\text{Do đó, } d(A; (SBC)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d((MNP); (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$



□

VÍ DỤ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

- ① Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD) .
- ② Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) .
- ③ Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

①

Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD) .

$$\text{Xét } \triangle SAB: \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

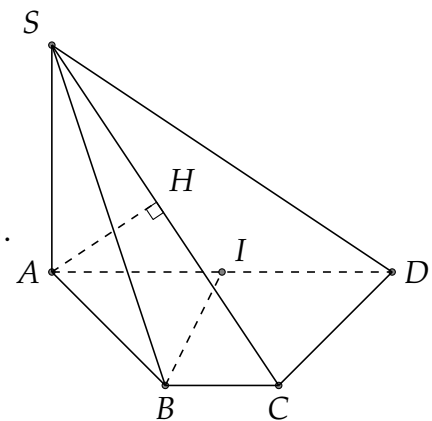
Gọi I là trung điểm của AD , suy ra

$$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD)).$$

$$\text{Mặt khác, } AI \cap (SCD) = D, \text{ nên } \frac{d(I, (SCD))}{d(A, (SCD))} =$$

$$\frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Suy ra } d(I, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



② Ta có $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.

Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.

Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

- ③ Ta có $AK \perp (SAD)$. Giả sử $(\alpha) \parallel (SAD)$ cắt AK tại E , khi đó

$$d((\alpha), (SAD)) = AE = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}AK.$$

Suy ra E là trung điểm của AK . Ta xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) qua E và song song với (SAD) .

Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$ với M, N, Q, P là trung điểm của AB, CD, SB, SC . Ta tính được $S_{MNPQ} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

□

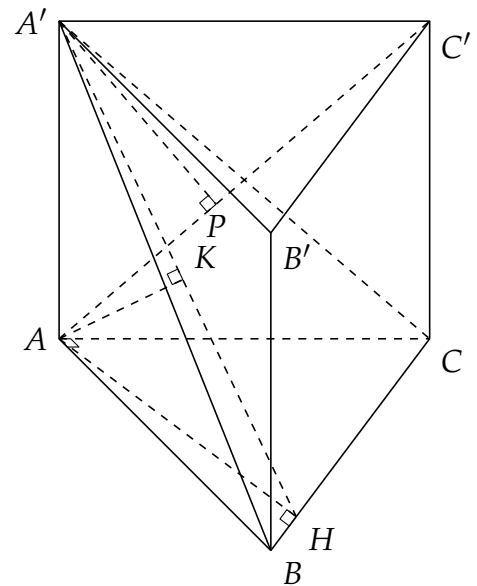
BÀI TẬP TỰ LUYỆN

BÀI 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp (ABC)$ và $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2a, AB = a\sqrt{3}$.

- ① Tính khoảng cách từ AA' tới mặt phẳng $(BCC'B')$.
- ② Tính khoảng cách từ A tới $(A'BC)$.
- ③ Chứng minh rằng $AB \perp (ACC'A')$ và tính khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') .

Lời giải.

- ① Hạ $AH \perp BC$ suy ra $AH \perp (BCB'C')$.
Ta có $d(AA'; (BCB'C')) = d(A; (BCB'C')) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- ② Hạ $AK \perp A'H$. Ta có $d(A; (A'BC)) = AK = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.
- ③ Hạ $A'P \perp AC'$. Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC') là $A'P = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

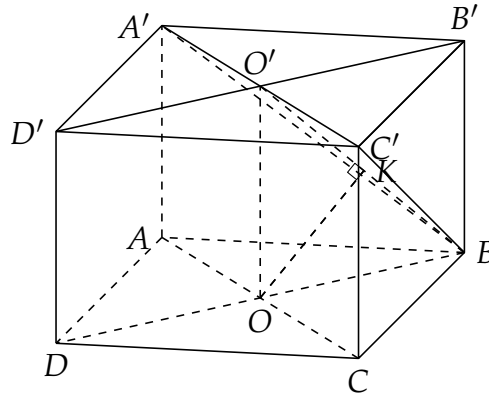


□

BÀI 2. Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

- ① Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.
- ② Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD) .

Lời giải.



Ta có $A'C' \perp (BDB'D')$ suy ra $(BA'C') \perp (BDB'D')$ theo giao tuyến BO' .
Hạ $OK \perp BO'$ thì $OK \perp (BA'C')$. Ta có

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OO'^2} \Rightarrow OK = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Khoảng cách giữa mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD') bằng khoảng cách từ O tới $(BA'C')$. $\square$

BÀI 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$.

- ① Tính khoảng cách từ A, B tới mặt phẳng (SCD) .
- ② Tính khoảng cách giữa đường thẳng AD và mặt phẳng (SBC) .
- ③ Tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng song song với (SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a}{3}$.

Lời giải.

① Đáp số: $d(A; (SCD)) = \frac{2a}{\sqrt{3}}; d(B; (SCD)) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$

② $d(AD; (SBC)) = \frac{2a}{\sqrt{5}}.$

③ $S_{EFGH} = \frac{4a^2}{3}.$

$\square$

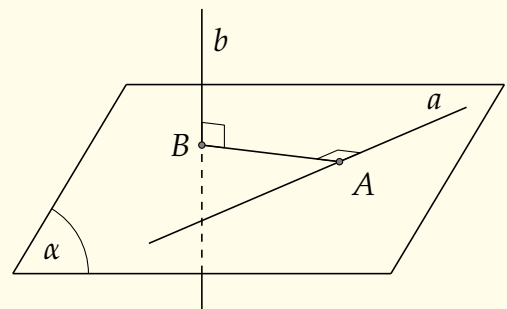
DẠNG 5.4. Đoạn vuông góc chung, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp. Ta có các trường hợp sau:

1) Trường hợp 1

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

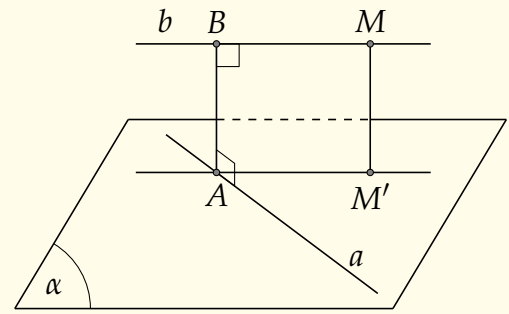
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



2) Trường hợp 2

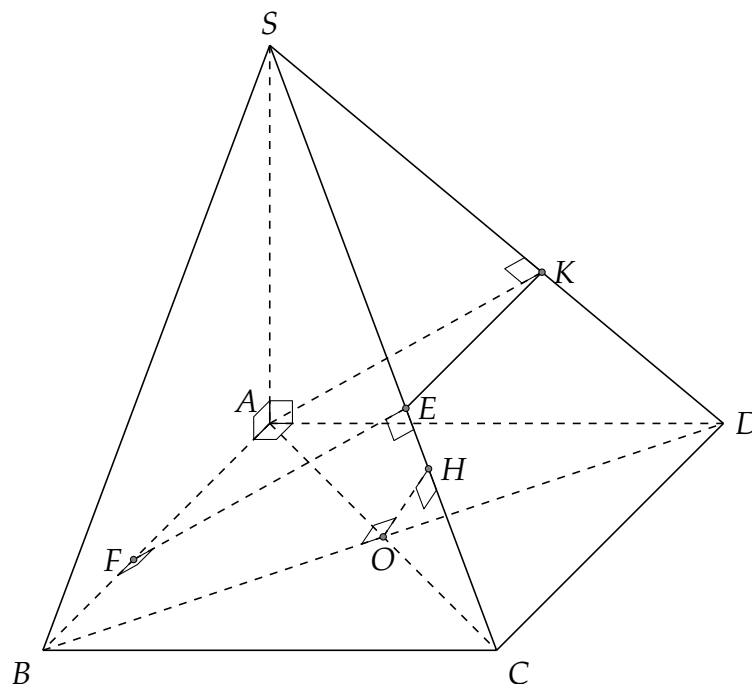
Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M' .
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A .
- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .

**Nhận xét**

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

VÍ DỤ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , có cạnh $SA = h$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau:

a) SB và CD .b) SC và BD .c) SC và AB .**Lời giải**

- a) Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

Mặt khác $BC \perp CD$. Vậy BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD .
Suy ra $d(SB, CD) = BC = a$.

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ tại } O$.

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OH \perp SC$ tại H , ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

$$\text{Ta có } \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{h^2 + 2a^2}}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{ah\sqrt{2}}{2\sqrt{h^2 + 2a^2}}.$$

c) Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD)$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD) \text{ theo giao tuyến } SD$.

Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $AK \perp SD$ tại K , ta có: $AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$.

Trong mặt phẳng (SCD) , kẻ $KE \parallel CD$ ($E \in SC$).

Trong mặt phẳng (AB, KE) , kẻ $EF \parallel AK$ ($F \in AB$) $\Rightarrow EF \perp SC$.

Lại có $AB \parallel CD$ và $CD \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow AB \perp EF$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của SC và AB .

$$\text{Ta có } EF = AK = \frac{SA \cdot AD}{SD} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

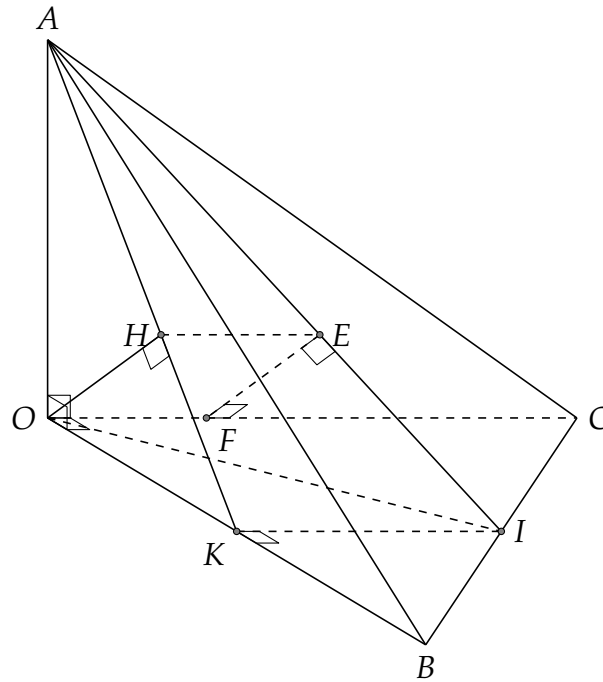
$$\text{Vậy } d(SC, AB) = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}.$$

□

VÍ DỤ 2. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng chéo nhau:

a) OA và BC .

b) AI và OC .



- a) Ta có $\begin{cases} OA \perp OI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow OI$ là đoạn vuông góc chung của OA và BC .

Tam giác OBC vuông cân tại O nên $OI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(OA, BC) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- b) Gọi K là trung điểm của OB , ta có $IK \parallel OC \Rightarrow OC \parallel (AIK)$.

Ta có $\begin{cases} IK \perp OB \\ IK \perp OA \end{cases} \Rightarrow IK \perp (OAB) \Rightarrow (AIK) \perp (OAB)$ theo giao tuyến AK .

Trong mặt phẳng (OAB) , kẻ $OH \perp AK$ tại H , ta có: $OH \perp (AIK) \Rightarrow OH \perp AI$.

Trong mặt phẳng (AIK) , kẻ $HE \parallel IK$ ($E \in SI$).

Trong mặt phẳng (HE, OC) , kẻ $EF \parallel OH$ ($F \in OC$) $\Rightarrow EF \perp AI$.

Lại có $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AH \Rightarrow OC \perp EF$.

Do đó EF là đoạn vuông góc chung của OC và AI .

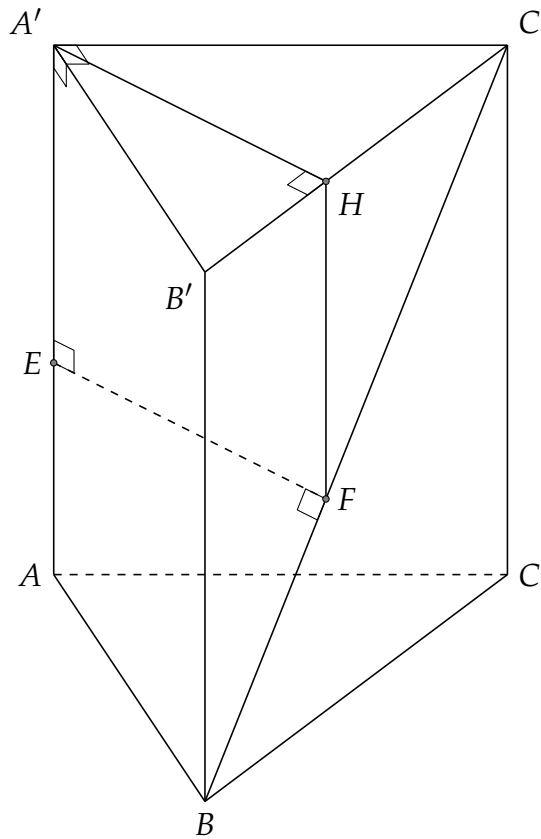
Trong tam giác vuông OAK ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{5}{a^2}$.

Suy ra $EF = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AI, OC) = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

□

VÍ DỤ 3. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA' .



Ta có $AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel (BB'C'C)$.

Vì $(A'B'C') \perp (BB'C'C)$ theo giao tuyến $B'C'$ nên trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H , ta có: $A'H \perp (BB'C'C) \Rightarrow A'H \perp BC'$.

Trong mặt phẳng $(BB'C'C)$, kẻ $HF \parallel AA'$ ($F \in BC'$). Trong mặt phẳng (HF, AA') , kẻ $FE \parallel A'H$ ($E \in AA'$) $\Rightarrow FE \perp BC'$.

Ta có $AA' \perp (A'B'C') \Rightarrow AA' \perp A'H \Rightarrow AA' \perp FE$.

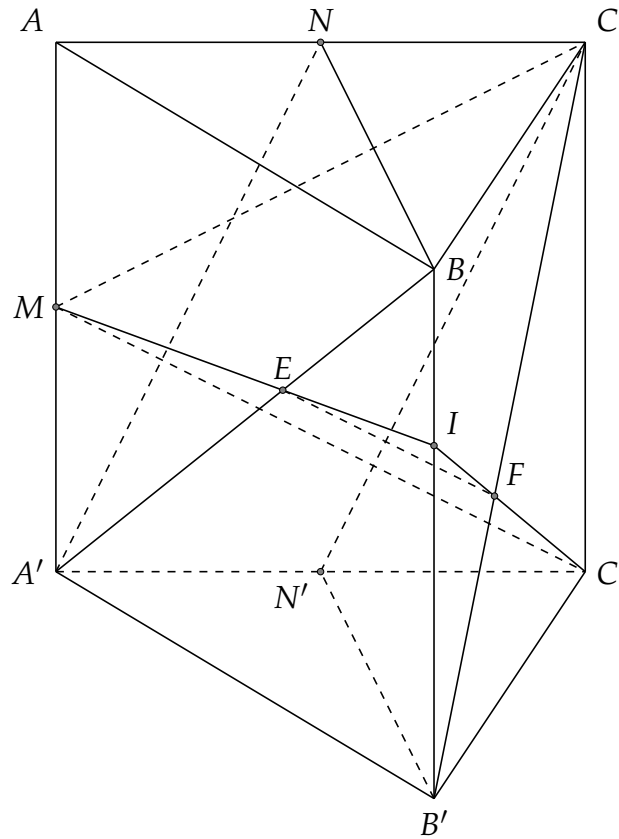
Do đó EF là đoạn vuông góc chung của AA' và BC' .

Trong tam giác vuông $A'B'C'$ ta có: $\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'C'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{4a^2} = \frac{5}{4a^2}$.

Suy ra $EF = A'H = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(AA', BC') = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. □

VÍ DỤ 4. Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Xác định đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.



Gọi M, N, N' lần lượt là trung điểm của $AA', AC, A'C'$.

Ta có $\begin{cases} BN \perp AC \\ BN \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BN \perp (ACC'A') \Rightarrow BN \perp C'M$.

Mà $C'M \perp A'N$ nên $C'M \perp (A'BN)$. Do đó $C'M \perp A'B$.

Tương tự ta có $C'M \perp (B'N'C) \Rightarrow C'M \perp CB'$.

Vậy ta có đường thẳng $C'M$ vuông góc với cả hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$.

Lấy điểm I thuộc BB' . Gọi E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$.

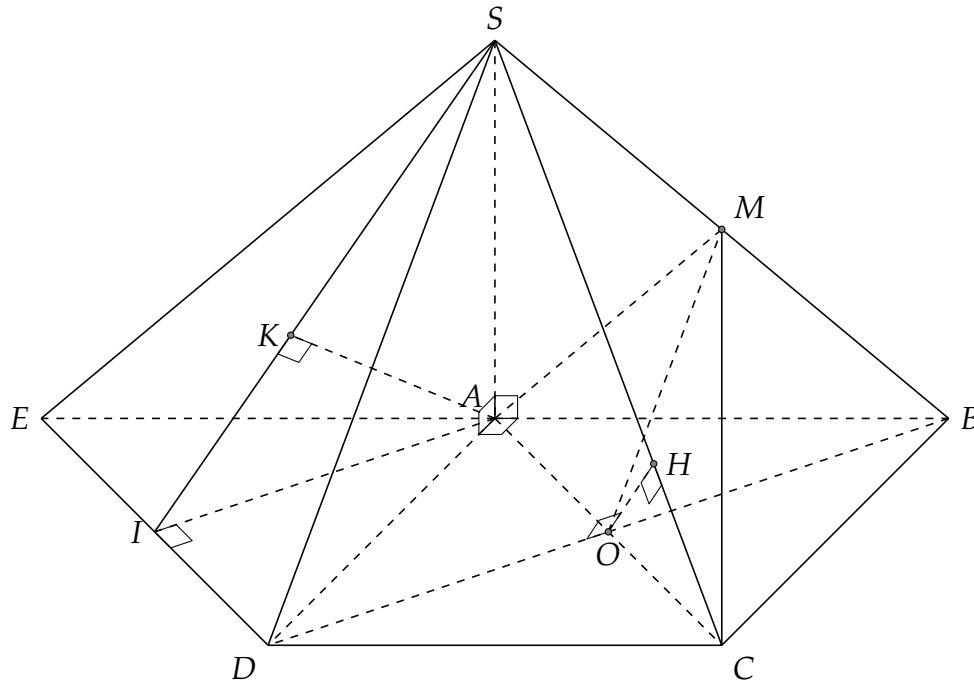
Ta cần tìm vị trí của I để $EF \parallel C'M$.

Ta có $EF \parallel C'M \Leftrightarrow \frac{IE}{ME} = \frac{FI}{FC'} \Leftrightarrow \frac{BI}{MA'} = \frac{IB'}{CC'}$.

Do $CC' = 2MA'$ nên $\frac{BI}{MA'} = \frac{IB'}{CC'} \Leftrightarrow IB' = 2BI$.

Vậy I là điểm thuộc đoạn BB' sao cho $IB' = 2BI$ thì EF là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ với E là giao điểm của MI và $A'B$; F là giao điểm của IC' và $B'C$. $\square$

VÍ DỤ 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .



- a) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \text{ tại } O.$

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $OH \perp SC$ tại H , ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (vì $BD \perp (SAC)$).
 Vậy OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

$$\text{Ta có } \frac{OH}{OC} = \frac{SA}{SC} = \sin \widehat{ACS} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

- b) dựng hình bình hành $ACDE$, ta có: $AC \parallel DE \Rightarrow AC \parallel (SDE)$.
 $\Rightarrow d(AC, SD) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)).$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, kẻ $AI \perp DE$ tại I , ta có $\begin{cases} DE \perp AI \\ DE \perp SA \end{cases} \Rightarrow DE \perp (SAI).$

$\Rightarrow (SDE) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AK \perp SI$ tại K , ta có: $AK \perp (SDE) \Rightarrow AK = d(A, (SDE)).$

Ta có $AIDO$ là hình bình hành nên $AI = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Trong tam giác vuông SAI ta có: $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AI^2} + \frac{1}{SA^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}.$

$$\text{Suy ra } AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(AC, SD) = d(A, (SDE)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

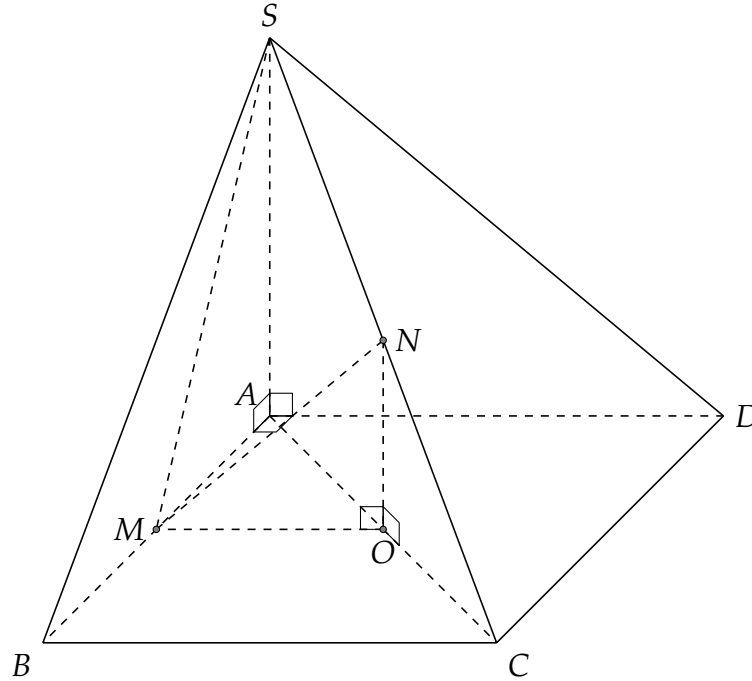
- c) Ta có $OM \parallel SD$ và $AC \parallel DE$ nên $(AMC) \parallel (SDE)$.

$$\text{Suy ra } d(SD, AM) = d((AMC), (SDE)) = d(A, (SDE)) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

□

BÀI 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a ; SA vuông góc với đáy và $SA = a$; M, N lần lượt là trung điểm của AB và SC . Chứng minh rằng MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC . Tính khoảng cách giữa AB và SC .

Lời giải.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có ON là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow ON \parallel SA \Rightarrow ON \perp (ABCD)$.

Suy ra MO là hình chiếu của MN trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Mà $MO \perp AB$ nên $MN \perp AB$ (định lý ba đường vuông góc).

Tam giác MON vuông tại $O \Rightarrow MN^2 = MO^2 + ON^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$.

Tam giác SAM vuông tại $M \Rightarrow SM^2 = SA^2 + AM^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$.

Ta có $SN^2 = \left(\frac{SC}{2}\right)^2 = \frac{SA^2 + AC^2}{4} = \frac{a^2 + 2a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$.

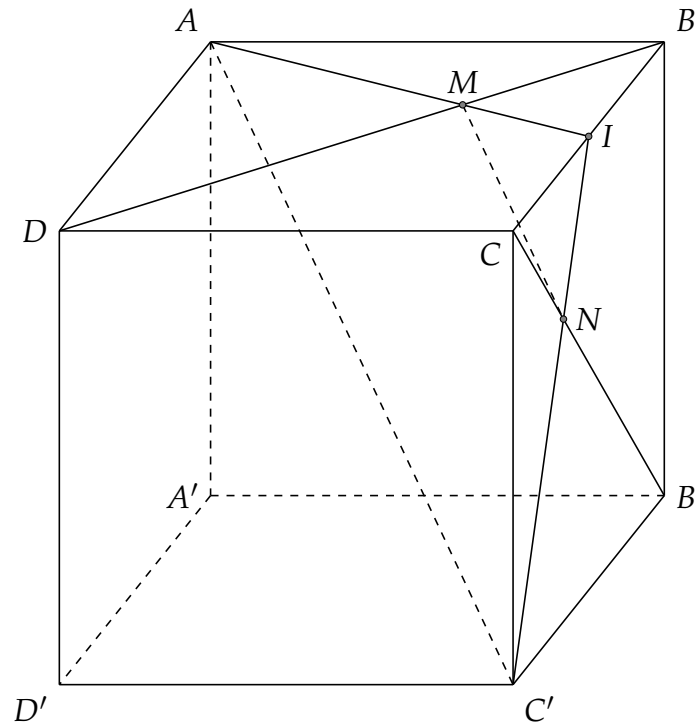
Suy ra $SM^2 = SN^2 + MN^2$ hay tam giác SMN vuông tại $N \Rightarrow MN \perp SC$.

Do đó MN là đoạn vuông góc chung của AB và SC .

Vậy $d(AB, SC) = MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. □

BÀI 2. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$.

Lời giải.



Ta có $BD \perp (ACC'A'') \Rightarrow BD \perp AC'$.

Lại có $B'C \perp (ABC') \Rightarrow B'C \perp AC'$.

Vậy ta có đường thẳng AC' vuông góc với cả hai đường thẳng $B'C$ và BD .

Lấy điểm I thuộc BC . Gọi M là giao điểm của AI và BD ; N là giao điểm của IC' và $B'C$.

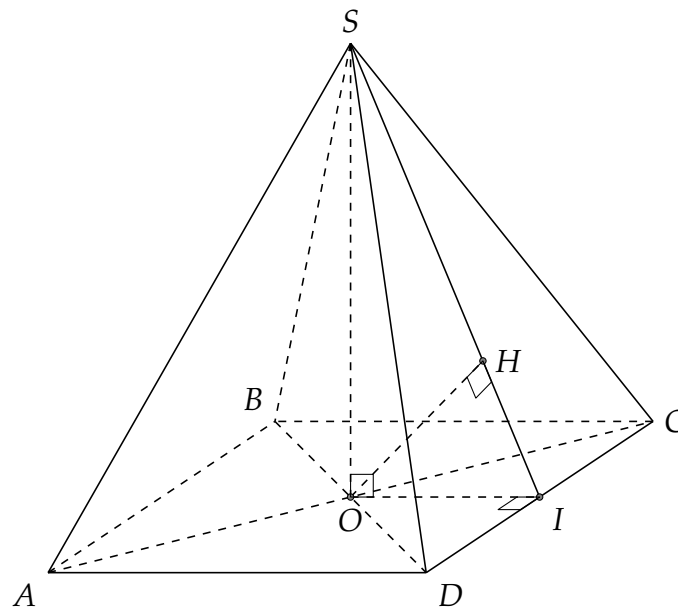
Ta cần tìm vị trí của I để $MN \parallel AC'$.

Ta có $MN \parallel AC' \Leftrightarrow \frac{IM}{MA} = \frac{IN}{NC'} \Leftrightarrow \frac{IB}{AD} = \frac{IC}{B'C'} \Leftrightarrow IB = IC$.

Vậy khi I là trung điểm của BC thì MN là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và $B'C$ với M là giao điểm của AI và BD ; N là giao điểm của IC' và $B'C$. $\square$

BÀI 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SO = a$. Tính Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và AB .

Lời giải.



Ta có: $DC \parallel AB \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD))$.

Gọi I là trung điểm của CD , ta có $CD \perp OI$.

Mà $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp (SOI) \Rightarrow (SCD) \perp (SOI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SOI) , kẻ $OH \perp SI$ tại H , ta có $OH \perp (SOI)$.

Trong tam giác vuông SOI ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OI^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{4}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2}$.

Suy ra $d(O; (SCD)) = OH = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

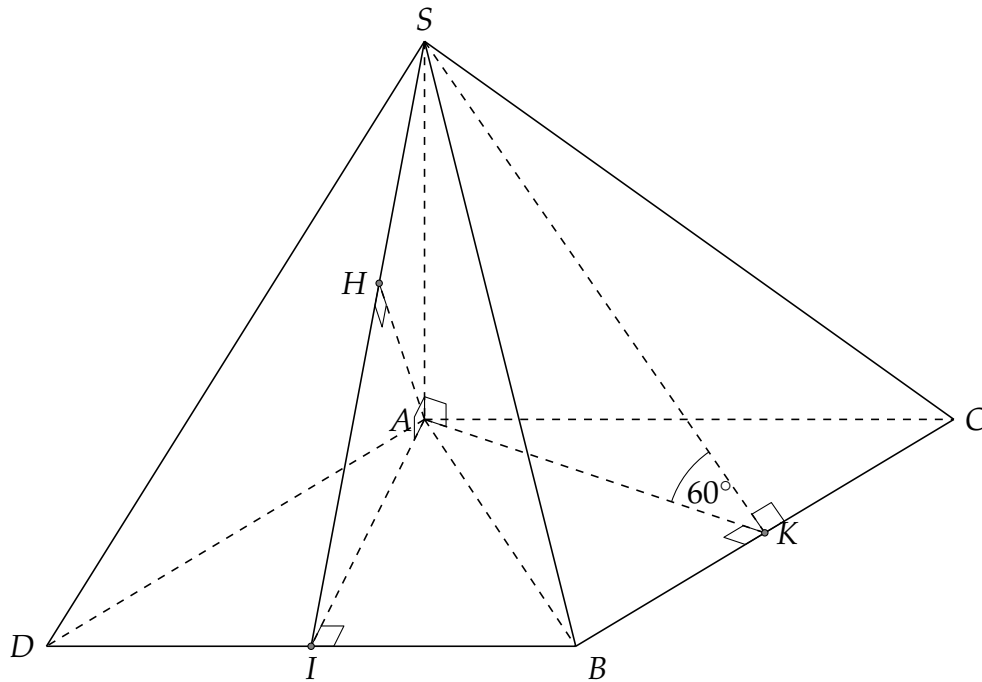
Vậy $d(AB; (SCD)) = d(A; (SCD)) = 2d(O; (SCD)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. $\square$

BÀI 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, mặt bên SBC tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SA và BC .

b) SB và AC .

Lời giải.



a) Gọi K là trung điểm của BC , ta có $\begin{cases} AK \perp BC \\ AK \perp SA \end{cases}$.

Do đó AK là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng SA và BC .

Vậy $d(SA, BC) = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Ta có $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SA \perp (ABC) \\ AK \perp BC. \end{cases}$

$\Rightarrow SK \perp BC \Rightarrow \widehat{SKA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) . Do đó $\widehat{SKA} = 60^\circ$.

Tam giác SAK vuông tại A có $\widehat{SKA} = 60^\circ \Rightarrow SA = AK \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}$.

Trong mặt phẳng (ABC) , dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.

$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi I là trung điểm của BD , ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ tại H , ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.

Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH .

$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{4}{9a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{16}{9a^2}$.

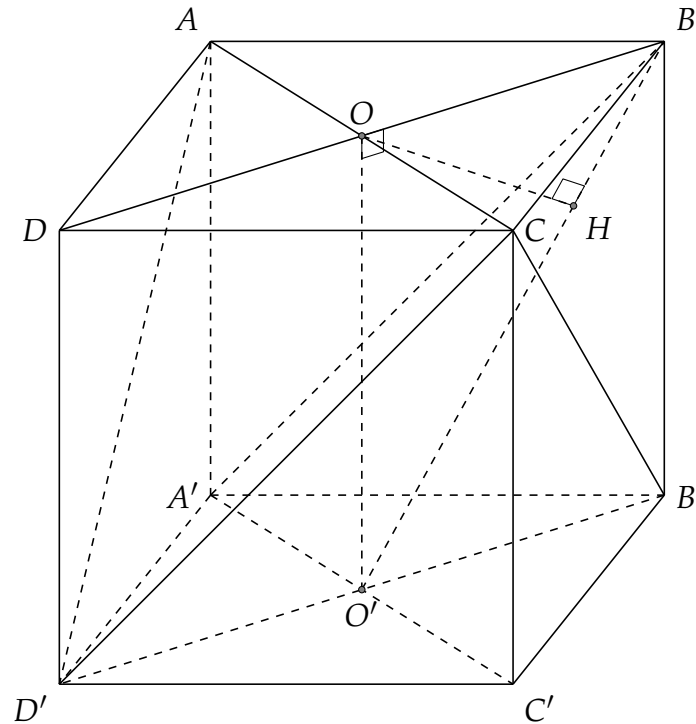
$$\Rightarrow AH^2 = \frac{9a^2}{16} \text{ hay } AH = \frac{3a}{4}.$$

$$\text{Vậy } d(SB, AC) = \frac{3a}{4}.$$

□

BÀI 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .

Lời giải.



Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai hình vuông $ABCD$ và $A'B'C'D'$.

Ta có $(ACD') \parallel (BA'C') \Rightarrow d(BC', CD') = d((ACD'), (BA'C')) = d(O, (BA'C'))$.

Ta có $A'C' \perp (OBB'O') \Rightarrow (BA'C') \perp (OBB'O')$ theo giao tuyến BO' .

Trong mặt phẳng $(OBB'O')$, kẻ $OH \perp BO'$ tại H , ta có $OH \perp (BA'C') \Rightarrow d(O, (BA'C')) = OH$.

Tam giác OBO' vuông tại O có OH là đường cao.

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OO'^2} = \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{a^2}.$$

$$\Rightarrow OH^2 = \frac{a^2}{3} \text{ hay } OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } d(BC', CD') = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

□

BÀI TẬP TỔNG HỢP

BÀI 6. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O , $A'A = A'B = A'C = \frac{a\sqrt{21}}{3}$, khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng $(ABB'A')$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính độ dài cạnh đáy của hình lăng trụ đã cho.

Lời giải.

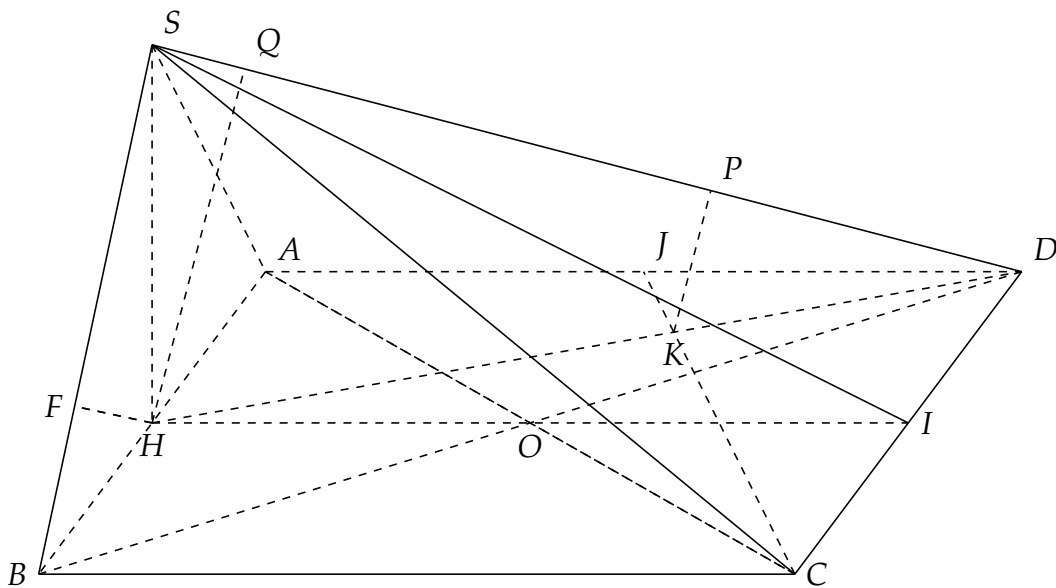
BÀI 6. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 3

A ĐỀ SỐ 1A

Câu 1. (6 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh $AB = a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi H, J lần lượt là trung điểm AB, AD .

- Chứng minh $SH \perp (ABCD)$; $(SBC) \perp (SAB)$
- Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$
- Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SBC) và khoảng cách giữa hai đường thẳng CJ và SD .

Lời giải.



- a) Ta có tam giác SAB đều và có H là trung điểm AB nên $SH \perp AB$.

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \Rightarrow SH \perp (ABCD) \dots \dots \dots (0.5) \\ SH \subset (SAB) \end{cases}$$

Ta có $BC \perp SH$ (vì tam giác SAB là tam giác đều vuông góc với mặt đáy) và $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$$\Rightarrow (SBC) \perp (SAB) \dots \dots \dots (0.5)$$

- b) Gọi I là trung điểm CD . Ta có: $\begin{cases} IH \perp CD \\ SH \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHI) \Rightarrow CD \perp SI \dots \dots \dots (0.5)$

$$\text{Mà } (SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{SI, HI}) \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\text{Ta có tam giác } SHI \text{ vuông tại } H, \text{ có } SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, IH = a, \tan \widehat{SIH} = \frac{SH}{IH} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \widehat{SIH} \approx 41^\circ.$$

$$\text{Vậy } ((SCD), (ABCD)) = 41^\circ \dots \dots \dots (0.5)$$

- c) Ta có $OH \parallel BC \subset (SBC) \Rightarrow OH \parallel (SBC) \Rightarrow d(O, (SBC)) = d(H, (SBC)) \dots \dots \dots (0.5)$

$$(SAB) \perp (SBC), (SAB) \cap (SBC) = SB, \text{ trong } (SAB) \text{ kẻ } HF \perp SB \text{ tại } F.$$

$$\Rightarrow HF \perp (SBC) \Rightarrow d(H, (SBC)) = HF \dots \dots \dots (0.5)$$

Tam giác SHB vuông tại H có HF là đường cao nên $\frac{1}{HF^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HB^2} = \frac{16}{3a^2}$
 $\Rightarrow HF = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Vậy $d(O, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (0.5).

Ta có $\triangle CDJ = \triangle DAH \Rightarrow \widehat{DCJ} = \widehat{ADH}$, mà $\widehat{DCJ} + \widehat{DJC} = 90^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{DJC} = 90^\circ \Rightarrow JC \perp DH$ và $CJ \perp SH \Rightarrow CJ \perp (SDH)$ (1.0)

Gọi $K = CJ \cap DH$.

Trong (SDH) kẻ $KP \perp SD$ tại P . Ta có $d(CJ, SD) = KP$ (0.5).

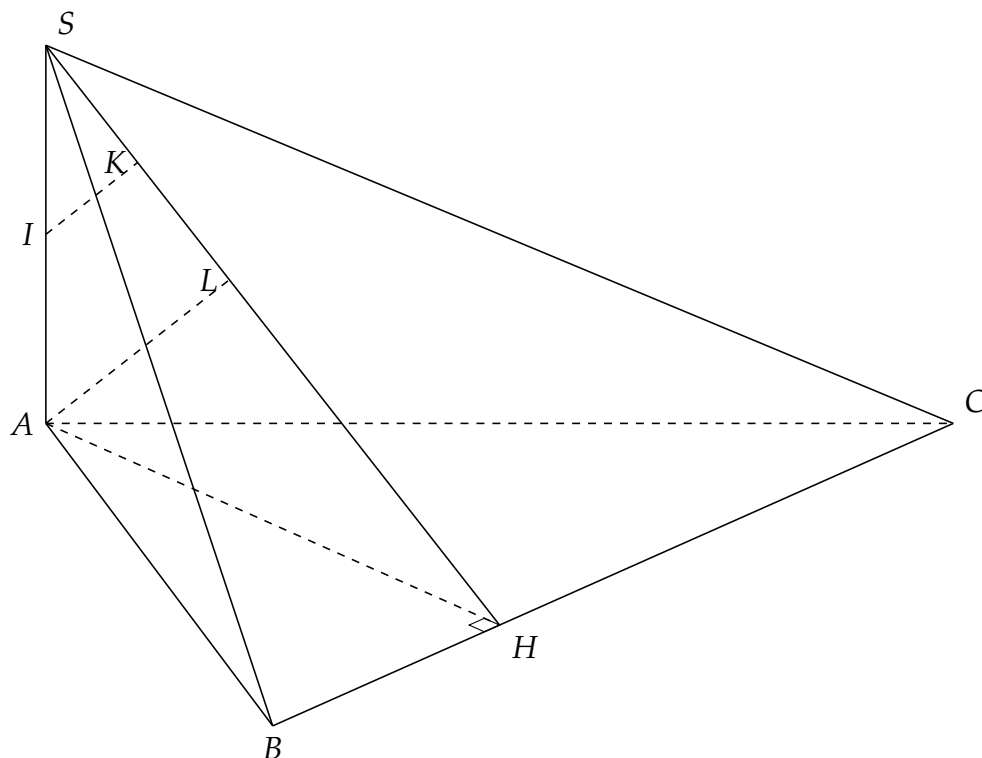
$\frac{DK}{DH} = \frac{2}{5} \Rightarrow KP = \frac{a\sqrt{30}}{20}$. Vậy $d(CJ, SD) = \frac{a\sqrt{30}}{20}$ (0.5).

□

Câu 2. (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A . Cạnh $SA \perp (ABC)$ biết $SA = AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$.

- Tính góc hợp bởi cạnh SB với mp(SAC)
- Dựng $AH \perp BC$ tại H . Chứng minh rằng $(SAH) \perp (SBC)$.
- Tính góc hợp bởi (SBC) và (ABC)
- Gọi I là trung điểm của SA . Tính khoảng cách từ điểm I đến (SBC) .

Lời giải.



- Ta có $BA \perp AC$ và $BA \perp SA \Rightarrow BA \perp (ABC)$
 $\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB lên (ABC)
 $\Rightarrow \widehat{(SB, (SAC))} = \widehat{(SB, AS)} = \widehat{BSA}$ (0.5)
Ta có $\tan BSA = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $\Rightarrow BSA = 30^\circ$ (0.5)

b) Ta có $SA \perp BC$

$$\text{Mà } AH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH) \dots\dots\dots (0.5)$$

c) Ta có $BC \perp (SAH)$

$$\Rightarrow BC \perp AH \text{ và } BC \perp SH$$

$$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SH, AH) = \widehat{SHA}$$

(0.5) Trong tam giác SAH vuông tại A ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan SHA = \frac{SA}{AH} = 2 \Rightarrow \widehat{SHA} = \arctan 2 \dots\dots\dots (0.5)$$

d) Từ I dựng $IK \perp SH$. Ta có $(SBC) \perp (SAH)$

$$\Rightarrow IK \perp (SBC) \Rightarrow IK \text{ là khoảng cách từ } A \text{ đến } (SBC) \dots\dots\dots (0.5)$$

Gọi AL là đường cao của tam giác SAH ta có

$$\frac{1}{AL^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AH^2} \Rightarrow AL = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow IK = \frac{AL}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \dots\dots\dots (0.5)$$

□

B ĐỀ SỐ 1B

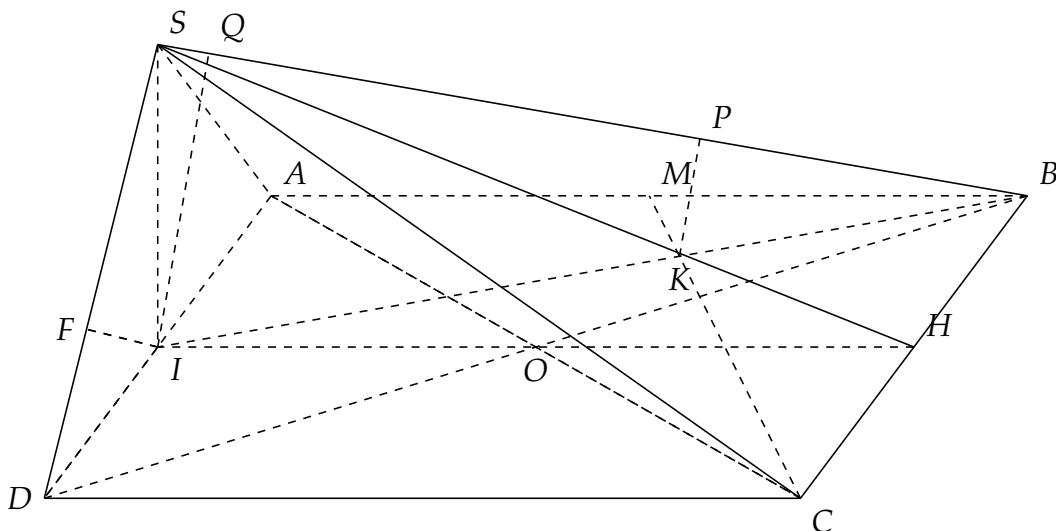
Câu 1. (6 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh $AB = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi I, M lần lượt là trung điểm AD, AB .

a) Chứng minh $SI \perp (ABCD); (SAD) \perp (SCD)$.

b) Tính góc hợp bởi hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.

c) Tính theo a khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và SB .

Lời giải.



a) Ta có tam giác SAD đều và có I là trung điểm AD

$$\text{Nên } SI \perp AD \text{ và } \begin{cases} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow SI \perp (ABCD) \dots\dots\dots (0.5) \\ SI \subset (SAD) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } CD \perp SI \text{ và } AD \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow (SAD) \perp (SCD) \dots\dots\dots (0.5)$$

b) Gọi H là trung điểm BC.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} HI \perp BC \\ SI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SHI) \Rightarrow BC \perp SH \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\text{Mà } (SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (\widehat{SH, HI}) \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\text{Ta có tam giác } SHI \text{ vuông tại } I, \text{ có } SI = a\frac{\sqrt{3}}{2}; IH = a, \tan \widehat{SHI} = \frac{SI}{HI} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \widehat{SHI} \approx 41^\circ \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\text{Vậy } ((SBC), (ABCD)) \approx 41^\circ$$

$$\text{c) Ta có: } OI \parallel CD \subset (SCD) \Rightarrow OI \parallel (SCD) \Rightarrow d(O, (SCD)) = d(I, (SCD)) \dots \dots \dots (0.5)$$

$$(SAD) \perp (SCD), (SAD) \cap (SCD) = SD, \text{ trong } (SAD) \text{ kẻ } IF \perp SD \text{ tại } F \Rightarrow IF \perp (SCD) \Rightarrow d(I, (SCD)) = IF \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\text{Tam giác } SID \text{ vuông tại } I \text{ có } IF \text{ là đường cao nên } \frac{1}{IF^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{16}{3a^2}$$

$$\Rightarrow IF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \dots \dots \dots (0.5).$$

$$\text{Vậy } d(O, (SCD)) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Ta có: } \triangle CBM = \triangle BAI \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{ABI} \text{ Mà } \widehat{BCM} + \widehat{BMC} = 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{ABI} + \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow CM \perp BI \text{ và } CM \perp SI \Rightarrow CM \perp (SBI) \dots \dots \dots (1.0)$$

$$\text{Gọi } K = CM \cap BI. \text{ Trong } (SBI) \text{ kẻ } KP \perp SB \text{ tại } P. \text{ Ta có } d(CM, SB) = KP \dots \dots \dots (0.5)$$

$$\frac{DK}{DI} = \frac{2}{5} \Rightarrow KP = \frac{a\sqrt{30}}{20}.$$

$$\text{Vậy } d(CM, SB) = \frac{a\sqrt{30}}{20} \dots \dots \dots (0.5)$$

□

Câu 2. (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC đều cạnh a . Cạnh $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

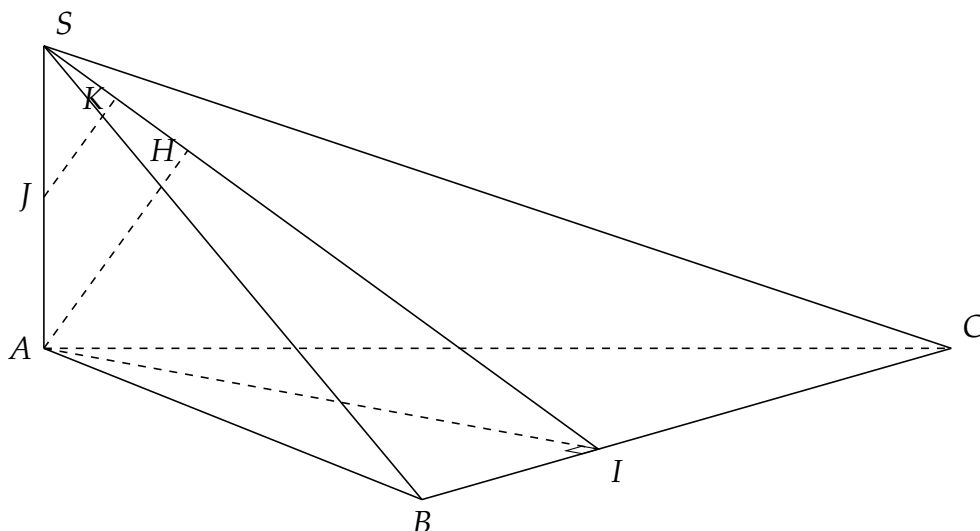
a) Tính góc hợp bởi cạnh SC với (ABC)

b) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.

c) Tính góc hợp bởi (SBC) và (ABC)

d) Gọi J là trung điểm của SA Tính khoảng cách từ điểm J đến (SBC) .

Lời giải.



- a) Vì $SA \perp (ABC) \Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên (ABC)
 $\Rightarrow (\overline{SC}, (\overline{ABCD})) = (\overline{SC}, \overline{AC}) = \widehat{SCA} \dots \dots \dots (0.5)$
 Ta có $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow SCA = 60^\circ \dots \dots \dots (0.5)$
- b) Ta có $BC \perp AI$ (vì $\triangle ABC$ đều)
 Mặt khác $SA \perp BC$ (vì $SA \perp (ABC)$)
 $\Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI) \dots \dots \dots (1.0)$
- c) Ta có $BC \perp (SAI)$
 $\Rightarrow BC \perp AI$ và $BC \perp SI$
 $\Rightarrow ((\overline{SCB}), (\overline{ABC})) = (\overline{SI}, \overline{AI}) = \widehat{SIA} \dots \dots \dots (0.5)$
 Trong tam giác SAI vuông tại A ta có $\tan \widehat{SIA} = \frac{SA}{AI} = 2 \Rightarrow \widehat{SIA} = \arctan 2 \dots \dots \dots (0.5)$
- d) Từ I dựng $JK \perp SI$
 Ta có $(SBC) \perp (SAH)$
 $\Rightarrow JK \perp (SBC) \Rightarrow JK$ là khoảng cách từ A đến $(SBC) \dots \dots \dots (0.5)$
 Gọi AH là đường cao của tam giác SAI ta có
 $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \Rightarrow JK = \frac{AH}{2} \Rightarrow IK = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \dots \dots \dots (0.5)$

□

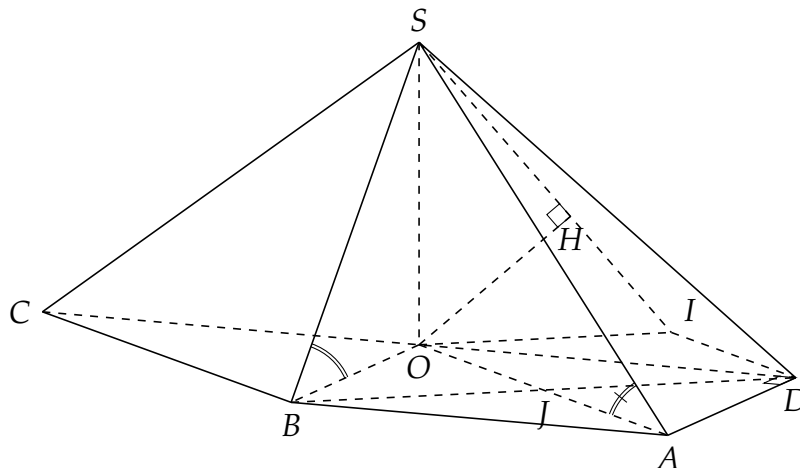
© ĐỀ SỐ 2A

Câu 1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A ($AB \parallel CD$), $AB = AD = a$, $CD = 2a$ và O là trung điểm CD . Trên đường thẳng đi qua O và vuông góc với $(ABCD)$, lấy điểm S sao cho SA tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 45° .

- ① Chứng minh BD vuông góc với mặt phẳng (SAO) .
- ② Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAO) .
- ③ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.
- ④ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BC .

Lời giải.

Vẽ hình đúng $\dots \dots \dots$ [1 điểm]



- ① Vì O là trung điểm $CD \Rightarrow CO = DO = a = AB \Rightarrow ABOD$ là hình vuông ($\widehat{BAD} = 90^\circ$)
 $\Rightarrow AO \perp BD$ tại J [1 điểm].
 Vì $BD \perp AO, BD \perp SO \Rightarrow BD \perp (SAO)$ [1 điểm].
- ② Vì $BD \perp (SAO)$ và $BD \in (SBD) \Rightarrow (SBD) \perp (SAO)$ [1 điểm].
- ③ Vì $ABOD$ là hình vuông nên $AB \perp OB$. Mà $AB \perp SO$ (do $SO \perp (ABCD)$) nên $AB \perp (SBO) \Rightarrow AB \perp SB$ [0,5 điểm].
 Lại có $(SAB) \cap (ABCD) = AB, AB \perp SB, AB \perp OB, SB \subset (SAB), OB \subset (ABCD)$ nên góc giữa (SAB) và $(ABCD)$ là $\widehat{SBO}$ [1 điểm].
 Vì $ABOD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AO = a\sqrt{2}$. Do SA tạo với $(ABCD)$ một góc 45° nên $\widehat{SAO} = 45^\circ \Rightarrow SO = a\sqrt{2}$ [0,5 điểm].
 Xét tam giác SOB vuông tại O có $\tan \widehat{SBO} = \frac{SO}{OB} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SBO} \approx 54,76^\circ$ [1 điểm].
- ④ Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng d đi qua $D, d \parallel BC \Rightarrow d \perp BD$. Từ O kẻ $OI \perp d (I \in d) \Rightarrow DJOI$ là hình vuông và $DI \perp (SOI) \Rightarrow OI = DJ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ [1 điểm].
 Kẻ $OH \perp SI (H \in SI) \Rightarrow OH \perp (SID) \Rightarrow OH = d(O; (SID))$ [0,5 điểm].
 Xét $\triangle SOI$ vuông tại O có
 $SO = a\sqrt{2}, OI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ [1 điểm].
 Có CO cắt (SDI) tại $D \Rightarrow \frac{d(C, (SDI))}{d(O, (SDI))} = \frac{CD}{OD} = 2$
 $\Rightarrow d(BC, SD) = d(C, (SDI)) = 2OH = \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{5}}$ [0,5 điểm].

□

D ĐỀ SỐ 2B

Câu 1. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại $A (AB \parallel CD), AB = AD = a, CD = 2a, SD \perp (ABCD)$ và SA tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60° .

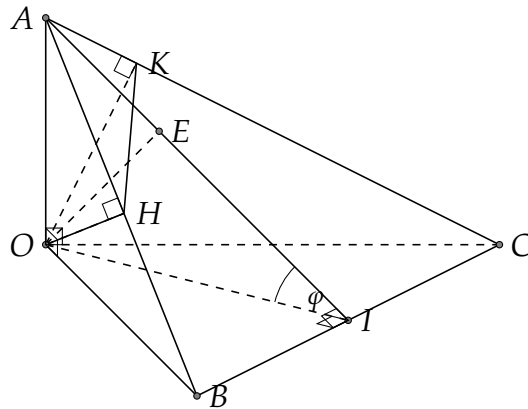
- ① Chứng minh BC vuông góc với mặt phẳng (SBD) .
- ② Gọi O là trung điểm CD . Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAO) .
- ③ Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$.
- ④ Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Vẽ hình đúng [1 điểm]

- ⑥ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng HK và OI .

Lời giải.



- ① Ta có $OA \perp (OBC)$; suy ra $OA \perp BC$ (1) 0,75 điểm
Ta có $OB = OC$ và I là trung điểm BC nên $BC \perp OI$ (2) 0,75 điểm
Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (OAI)$ 0,5 điểm
- ② Vì H, K lần lượt là trung điểm AB, AC nên $HK \parallel BC$ 0,5 điểm
Theo ý a) $BC \perp (OAI)$ nên $HK \perp (OAI)$ 0,5 điểm
- ③ Từ O kẻ $OE \perp AI$ (1). Ta có $BC \perp (OAI)$ nên $BC \perp OE$ (2) 0,5 điểm
Từ (1) và (2) suy ra $OE \perp (ABC)$, suy ra $d(O, (ABC)) = OE$ 0,5 điểm
xét tam giác AOI vuông tại O , ta có $\frac{1}{OE^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{3}{a^2}$ suy ra $OE = \frac{a}{\sqrt{3}}$
..... 0,5 điểm
- ④ Ta có $OE \perp (ABC)$ nên hình chiếu của OA lên mặt phẳng (ABC) là AE , góc $\alpha = \widehat{OAE}$
..... 0,75 điểm
Ta có tam giác OAE vuông tại E và $OE = \frac{a}{\sqrt{3}}$ nên $\cos \alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 0,75 điểm
- ⑤ Góc $\varphi = \widehat{OIA}$ 0,75 điểm
Ta có $\tan \varphi = \frac{OA}{OI} = \sqrt{2}$ 0,75 điểm
- ⑥ Ta gọi F là giao điểm của HK và AI , từ F kẻ $FG \perp OI$, mặt khác $HK \perp (OAI)$ (cmt) suy ra $FG \perp HK$, khi đó ta có FG là đoạn vuông góc chung của HK và OI 0,75 điểm
Xét tam giác OAI vuông tại O , ta có F là trung điểm của AI và $FG \parallel OA$ suy ra $FG = \frac{1}{2}OA = \frac{a}{2}$ 0,75 điểm.
Hình vẽ đúng 1,0 điểm

□

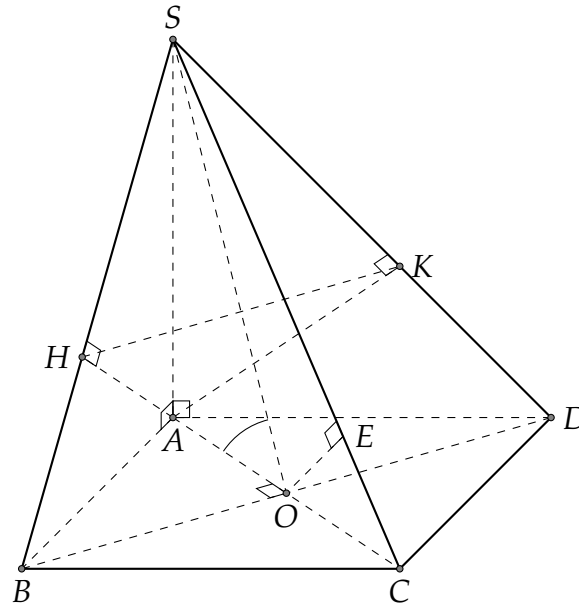
F ĐỀ SỐ 3B

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- ① Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
② Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SBD)$.

- ③ Tính góc α giữa SC và mặt phẳng đáy, góc β giữa SC và mặt phẳng (SAB) .
- ④ Tính tang của góc φ giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$.
- ⑤ Tính khoảng cách từ điểm A đến SBC , khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng SCD .
- ⑥ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và BD .

Lời giải.



- ① Ta có tam giác SAB và SAD là các tam giác vuông vì $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$ 0,5 điểm
Ta có $SA \perp CD$ và $CD \perp AD$ suy ra $CD \perp (SAD)$, suy ra $CD \perp SD$, do đó tam giác SDC vuông tại D 0,5 điểm
Ta có $SA \perp BC$ và $BC \perp AB$ suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra $BC \perp SB$, do đó tam giác SBC vuông tại B 0,5 điểm
- ② Ta có $BD \perp SA$ vì $SA \perp (ABCD)$
và $BD \perp AC$ và suy ra $BD \perp (SAC)$ 0,5 điểm
Do đó $(SAC) \perp (SBD)$ 0,5 điểm
- ③ Ta có CA là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ do đó góc $\alpha = \widehat{SCA}$ 0,5 điểm
Vì tam giác SAC có $SA = AC = a\sqrt{2}$ suy ra $\alpha = 45^\circ$ 0,5 điểm
Ta có $BC \perp (SAB)$ suy ra hình chiếu của SC lên mặt (SAB) là SB , do đó góc $\beta = \widehat{BSC}$.. 0,5 điểm
Vì tam giác SBC vuông tại B , ta có $\tan \beta = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\beta = 30^\circ$ 0,5 điểm.
- ④ Gọi O là giao điểm AC và BD . Ta có $AC \perp BD$ và $SO \perp BD$ do đó góc φ giữa (SBD) và $(ABCD)$ là $\widehat{SOA}$ 0,75 điểm
Tam giác SAO vuông tại A , ta có $\tan \varphi = \frac{SA}{AO} = 2$ 0,75 điểm
- ⑤ Kẻ $AH \perp SB$ suy ra $AH \perp (SBC)$, do đó $d(A, (SBC)) = AH$ 0,5 điểm
Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$ suy ra $AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ 0,5 điểm
Kẻ $AK \perp SD$ suy ra $d(A, (SCD)) = AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ 1,0 điểm

- ⑥ Từ O kẻ $OE \perp SC$, do $BD \perp (SAC)$ suy ra $BD \perp OE$, do đó $d(SC, BD) = OE \dots 0,75$ điểm
 Xét tam giác vuông OEC ta có $\sin \widehat{SCA} = \frac{OE}{OC}$ suy ra $OE = \frac{a}{2} \dots 0,75$ điểm
 Hình vẽ đúng $\dots 0,5$ điểm

□